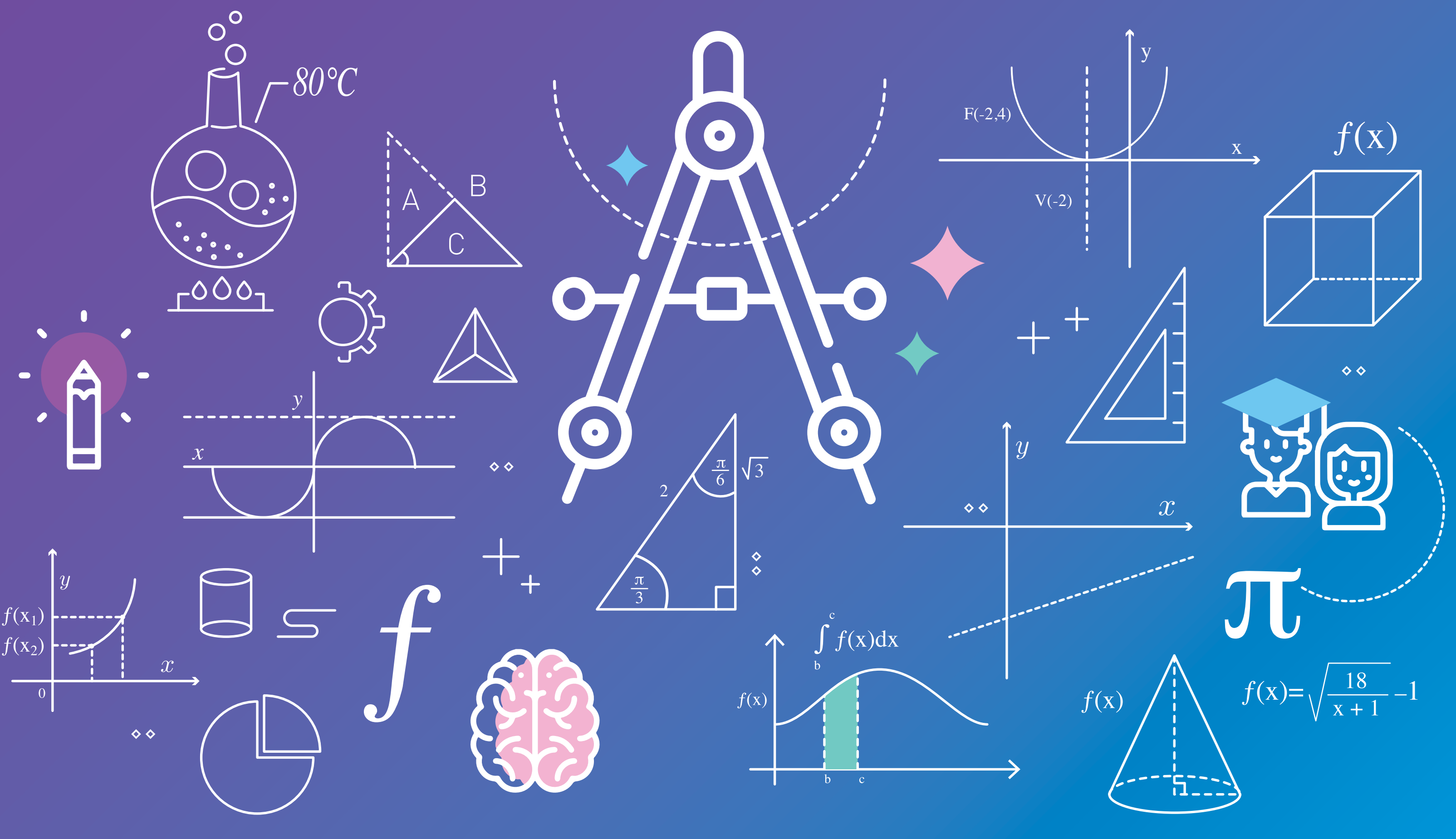
FUNDACIÓN YPF

LA ENERGÍA EN LA ESCUELA SECUNDARIA

PROYECTO N°4



ENSEÑAR Y APRENDER MATEMÁTICA
A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

LA ENERGÍA EN LA ESCUELA SECUNDARIA

PROYECTO N° 4

ENSEÑAR Y APRENDER MATEMÁTICA
A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

FUNDACIÓN YPF

en alianza con

FUNDACIÓN VOZ

Ministerio de Educación
Presidencia de la Nación

Vos y la Energía Secundaria cuenta con el auspicio del Ministerio de Educación
según resolución 2018-15-APN-SECIYCE#MECCYT

Trillini, María Paula
Vos y la energía secundaria : la energía en la escuela secundaria : proyecto 4 / María Paula Trillini ; Débora Romina Sanguinetti ; María Cecilia de Cortazar. - 1a edición para el profesor - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Fundación YPF, 2021.
Libro digital, HTML

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-4153-20-3

1. Energía. 2. Diseño de Proyecto. 3. Docentes de Escuela Secundaria. I. Sanguinetti, Débora Romina. II. de Cortazar, María Cecilia. III. Título.
CDD 621.042

Editado por Fundación YPF
Macacha Güemes 515, C1106BKK, Buenos Aires, Argentina

Proyecto y Coordinación General
Fundación YPF

Textos
María Paula Trillini
María Cecilia de Cortazar
Débora Romina Sanguinetti

Corrector
Ibris

Diseño
Ibris

Impresión
Talleres Trama S.A
Primera edición: 2500 ejemplares
Marzo 2022
Ciudad Autónoma de Buenos Aires

TABLA DE CONTENIDOS

LA CIENCIA Y LA ENERGÍA EN EL AULA

Con el compromiso de contribuir a los Objetivos de Desarrollo Sostenible del país, desde la FUNDACIÓN YPF promovemos la educación de calidad impulsando la innovación y la creatividad con el foco puesto en la energía.

Generamos contenidos para acercar a los más chicos, adolescentes y jóvenes al mundo de la energía, la ciencia y la tecnología. Con este objetivo, desarrollamos Vos y la Energía, que surgió como un libro, escrito por dos científicos de reconocida trayectoria, Diego Golombek y Diego Ruiz, para que las niñas y los niños conozcan la importancia que tiene la energía para la vida cotidiana. Esta iniciativa fue creciendo hasta convertirse en una experiencia educativa que incluye una web interactiva con juegos, experimentos, stop motion, videos, además de talleres para quienes están aprendiendo.

Pensando en cómo aportar herramientas a quienes enseñan, creamos la Guía "La Energía en el Aula" para maestros de primaria, que es acompañada de talleres de formación. Son 9 cuadernillos que abordan los distintos tipos de energía, asociando los contenidos que se presentan a los diseños curriculares.

VOS Y LA ENERGÍA PARA SECUNDARIA: EL TURNO DE LA MATEMÁTICA

Igualmente, Vos y la Energía para Secundaria se compone de varias guías diseñadas a partir de los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP), que proponen a las y los estudiantes desafíos a resolver trabajando de manera colaborativa bajo la orientación de sus docentes. Estas guías de trabajo pretenden ser un material de utilidad a la hora de planificar la enseñanza de los contenidos vinculados a la energía. A través de la plataforma digital Fundación YPF Lab (lab.fundacionypf.org) estudiantes y docentes pueden acceder a contenidos interactivos, materiales y actividades.

De esta manera, acercamos una propuesta basada en ciencias a las escuelas secundarias, tanto para aquellas que tienen experiencia trabajando por proyectos como para aquellas que desean comenzar a recorrer este camino, para que se apropien de una nueva forma de enseñanza y que puedan desarrollarlos de acuerdo con su realidad y contexto.

Ahora bien, en esta oportunidad le llegó el turno a la matemática. La valoramos de una manera especial en razón de los aportes que puede ofrecer a las experiencias de enseñanza y aprendizaje encuadradas en el Enfoque STEAM. El razonamiento matemático representa, en esta perspectiva, un lenguaje común para articular los posibles abordajes a la resolución de problemas, a la formulación de hipótesis, a la modelización de diversas situaciones, al diseño y la construcción de herramientas, prototipos y objetos, al hacer tecnológico y artístico.

El desafío que nos proponemos es pensar la matemática escapando de las visiones que la encierran en la instrumentalidad pura y dura o en los modos "normativos" que la reducen a "procedimientos" o "mecanismos", que hay que llevar adelante de un solo modo posible. Tal como describen las autoras, es preciso caracterizar al pensamiento matemático como "algo que se hace" y no como un "don" o una "herencia". Invitamos a profundizar esta manera de verlas, pero sobre todo apostar a la idea de recrear la clase como una "comunidad de producción de conocimiento, en la que el docente y los estudiantes realizan intercambios en relación a una situación".

Como hemos hecho con todos los anteriores, les invitamos a apropiarse de este proyecto y les deseamos una experiencia enriquecedora junto a sus estudiantes.

Dirección Ejecutiva
Fundación YPF

ES CLAVE LA TRANSFORMACIÓN DE LA SECUNDARIA

Aprender y enseñar matemática a partir de la resolución de problemas, forma parte de las nuevas metodologías de enseñanza y aprendizaje que integran una de las ocho Banderas para la Transformación. Esta iniciativa impulsada desde el año 2016, reúne estrategias pedagógicas que cuentan con el aval y la participación intersectorial de los representantes más relevantes de la educación secundaria en nuestro país. Pensar, diseñar e implementar prácticas educativas que fomenten iniciativas innovadoras y creativas dentro del aula, es vital para que la transformación educativa se convierta en realidad.

En este sentido, desde el año 2018, trabajamos junto a Fundación YPF promoviendo nuevas metodologías de enseñanza y aprendizaje a través del modelo STEAM y el trabajo por proyectos. Agradecemos y valoramos profundamente esta alianza, que nos posibilita acercarnos a miles de docentes mediante un material pedagógico de calidad, de acceso libre y gratuito.

Continuamos trabajando entre todas y todos para transformar la escuela secundaria argentina.

Equipo de Coordinación
Fundación VOZ

A MODO DE PRESENTACIÓN

Este libro nos habla, una vez más, de la enseñanza de matemática en la escuela secundaria. Y lo hace desde una posición compartida por una amplia comunidad de nuestro país, que desde hace varias décadas participa con profesores y profesoras en diferentes proyectos, propuestas, documentos y planes cuyo acento está puesto en la búsqueda de condiciones para que el aula de la escuela secundaria se constituya en un espacio de producción matemática por parte de las y los estudiantes.

"Enseñar y aprender matemática a partir de la resolución de problemas" es la primera toma de posición de las autoras, en la búsqueda de esas condiciones. Pero ¿qué significa eso realmente? Es en los pliegues de esa posición donde se meten una y otra vez con este libro.

¿Cómo se sostiene un espacio de producción en el aula? Sin duda, los problemas que allí planteemos jugarán un papel central, pero no son el único ingrediente. Desde la presentación, las autoras incorporan otras dimensiones y explicitan el valor del trabajo colectivo posterior a la resolución autónoma efectuada por las y los estudiantes. Nos ofrecen una imagen del aula como un espacio de diálogo, de discusión, donde ocurre una conversación: *"Esta conversación, sostenida por el profesor, va construyendo una historia que tiene como protagonistas a la matemática y los estudiantes"*.

La clase, cualquier clase, pero en particular la de matemática como una conversación. La escuela como lugar de desafío, como espacio para volar… para ser matemático un rato y otro músico, y otro historiador. ¡Que linda imagen nos dejan las autoras!

Alguien podría decir que es utópica, que las alumnas y los alumnos no quieren. Las autoras parecen asumir otra hipótesis y se preguntan más bien por las condiciones para que eso ocurra. En las tres propuestas que componen la obra, van agregando sustancia al posible trabajo por hacer a partir de la resolución de los problemas que presentan: discutir sobre diferentes procedimientos, formas de representación y justificaciones que hayan aparecido, y aún reflexionar sobre los modos de aprender y producir.

El libro recorre también los tipos de tareas que pueblan la vida escolar desde siempre –el estudio, la evaluación, los exámenes, la carpeta– y las resignifican, les dan un sustento, se preguntan por las condiciones concretas de su sostenimiento.

Nos alertan acerca del papel central de los diferentes registros de representación en la actividad matemática, y en la escolar particularmente. Y lo hacen anclándolo en las actividades que proponen.

En resumen, con este material ofrecen a las y los docentes un conjunto de problemas / preguntas / situaciones / reflexiones, además de sugerencias concretas para el trabajo posterior a la resolución de los problemas.

La invitación a prologar este libro nos permite compartir una idea que venimos sosteniendo en distintos espacios: así como pensamos en un trayecto de estudio de nuestras alumnas y nuestros alumnos en el aula del secundario, es urgente pensar en la necesidad de trayectos de estudio y discusión del colectivo de docentes de matemática de una escuela, que se reúna a pensar la enseñanza, a estudiar propuestas, a desarrollar otras, a probar cambios; que los cambios se jueguen en el aula pero se estudien en su funcionamiento efectivo entre todas y todos. La imagen es la de la sala de profesoras y profesores como un pequeño laboratorio sobre la enseñanza y el aprendizaje de matemática, como lugar de diálogo, de pensar juntas y juntos la clase, de discutir y tratar de entender mejor lo que pasó en el aula. Este material sería un hermoso combustible para ese trabajo ineludiblemente colectivo de las y los docentes de matemática, que necesita, sin duda, condiciones institucionales para ponerse en marcha.

Carmen Sessa
Docente en Cs. Exactas - UBA
Docente e Investigadora - UNIPE

Introducción para el equipo docente

INTRODUCCIÓN PARA EL EQUIPO DOCENTE

Nos resulta ineludible iniciar el diálogo enfatizando algunas cuestiones centrales que se pondrán en juego en las propuestas. La primera de ellas es la concepción epistemológica acerca de la matemática; es decir, cuál es la postura que adoptaremos en relación con qué es y qué significa estudiarla. Desde nuestra mirada, compartida por otros miembros de la comunidad educativa, **la matemática es concebida como producto social, histórico y cultural**. En palabras de Charlot (1991, p. 1):

> **¿Qué es estudiar matemáticas? Mi respuesta global será que estudiar matemáticas es efectivamente hacerlas, en el sentido propio del término, construirlas, fabricarlas, producirlas, ya sea en la historia del pensamiento humano o en el aprendizaje individual. [...] Los conceptos matemáticos no son un bien cultural transmitido hereditariamente como un don o socialmente como un capital, sino el resultado de un trabajo del pensamiento, el trabajo de los matemáticos a través de la historia, el del niño a través de su aprendizaje. El Don y el Capital de un lado, el Trabajo del otro: empleo estos términos intencionalmente para que se pueda comprender mejor cuál es el problema de fondo planteado por la democratización de la enseñanza de la matemática.**

En consecuencia, pensamos la clase de matemática como una **comunidad de producción de conocimiento en la que docentes y estudiantes realizan intercambios referidos a una situación.** En este ida y vuelta se van entramando ideas: algunas que el docente pudo haber pensado previamente, otras más ocurrentes; hasta incluso desorganizadas e incompletas. Esta conversación, sostenida por el profesor va construyendo una historia que tiene como protagonistas a la matemática y a los estudiantes.

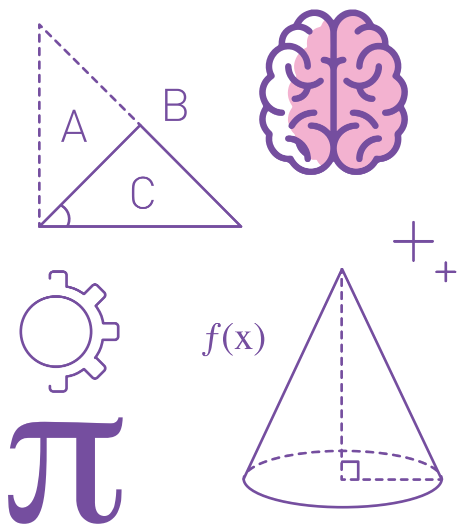
Las escenas cotidianas se gestan en torno a la discusión, en donde es fundamental asumir una postura y también dialogar con la de otros. También, dudar, sentir incertidumbre o entusiasmo, revisitar ideas viejas (aceptando que se pueden adaptar o no), formular nuevas, etcétera. **Promover este tipo de rodaje implica para cada estudiante un trabajo intelectual, con el fin de construir conocimiento con sentido; es decir un aprendizaje que emerja cargado de significados.** Tal como menciona Charnay (1994, p. 4):

> **El alumno debe ser capaz no sólo de repetir o rehacer, sino también de resignificar en situaciones nuevas, de adaptar, de transferir sus conocimientos para resolver nuevos problemas. Y es, en principio, haciendo aparecer las nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas como se permitirá a los alumnos construir el sentido. Sólo después estas herramientas podrán ser estudiadas por sí mismas.**

Podemos afirmar entonces que la ciencia y, en particular, **la matemática se van construyendo en estrecha ligazón con la resolución de problemas**, tanto de aquellos relacionados con otras disciplinas (por ejemplo, las Ciencias Naturales) como con la organización y estructuración de la misma matemática. Los problemas, de origen diverso, requieren para constituirse como tales de un trabajo intelectual de los matemáticos que no encuentran en una primera mirada la solución. Es así que existen momentos de reformulación y familiarización con la situación: relacionarlos con otras situaciones ya estudiadas, comprender las diferencias, etcétera.

Sin embargo, la idea de problema matemático que suele predominar está asociada a la resolución de "problemas de aplicación", estrechamente vinculada con un modelo de enseñanza normativo. En ese marco para resolver en forma exitosa un problema, basta con escuchar o leer una explicación, enfrentarse a ejemplos y estar atento a los pasos de la técnica que se quiere reproducir (o a la identificación de palabras clave). El entrenamiento y la ejercitación son los medios que posibilitan "saber" resolver problemas de matemática. Este acercamiento a la resolución de problemas (de aplicación) atrapa una pequeña parte del trabajo matemático, pero deja afuera actividades intrínsecas del hacer matemática que consideramos valiosas. Por ejemplo, aquellas que involucran reflexionar, explorar, conjeturar, validar, discutir, experimentar, probar, pensar con otros, etcétera.

La posibilidad de que los estudiantes se involucren en la resolución de problemas, que recuperen de manera amplia el quehacer matemático, requiere otro modelo de enseñanza. Uno en el cual cada estudiante construya sus saberes acompañado por el docente y que le permita tener una posición activa frente al conocimiento, tomando decisiones y haciéndose cargo de su proceso de aprendizaje.



Además, de esta manera, **los estudiantes pueden hacer matemática de la forma más próxima posible a la de un matemático; es decir, construir conocimiento en interacción con otros y a partir de la resolución de problemas**. Para que esto suceda es necesario que el docente se corra del centro de la escena y que no solo planifique, organice y proponga, sino también que delinee un medio en donde el problema y la discusión en torno a él estén habilitados, y en donde se recuperen las voces de los estudiantes.

La actividad matemática en el aula no depende únicamente del enunciado del problema, además involucra las interacciones, la voz docente, la historia de la clase y hasta las condiciones institucionales en las que ese problema tiene lugar. Por eso, las propuestas que presentamos no solo incluyen los enunciados de los problemas sino también recomendaciones para la gestión de la clase, anticipaciones de estrategias que pueden surgir (basadas en las experiencias de implementación en el aula) y pistas para pensar el análisis didáctico.

En la **primera propuesta** comenzamos presentando una secuencia de **problemas de modelización**, que tiene como referencia el proceso de calentamiento de agua. Para concluir esta propuesta se plantean algunos asuntos en relación con el **estudio y la evaluación en matemática**.

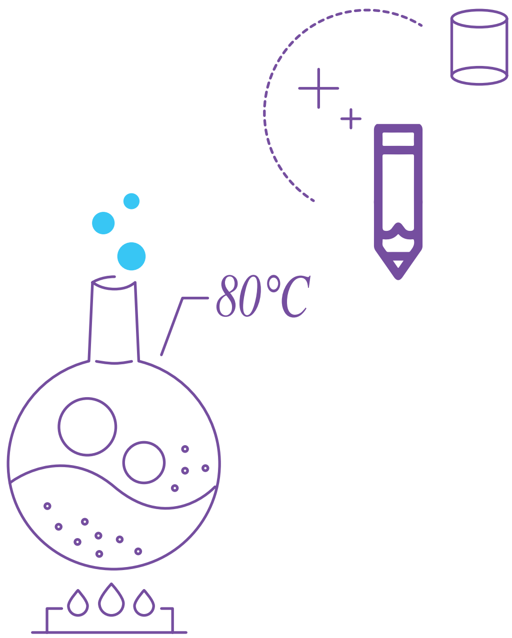
La **segunda propuesta** está formada por una colección de **tipos de problemas** que el docente puede tener como referencia al momento de trabajar con **gráficos** en el aula. Está organizada en bloques según el tipo de gráfico: de barras (**bloque 1**), cartesiano (**bloque 2**) y de funciones lineales (**bloque 3**). Además, incluye el análisis de diferentes variables utilizadas en el contexto de la energía: la energía eléctrica autogenerada, la temperatura de una sustancia y la producción de biogás, entre otras.

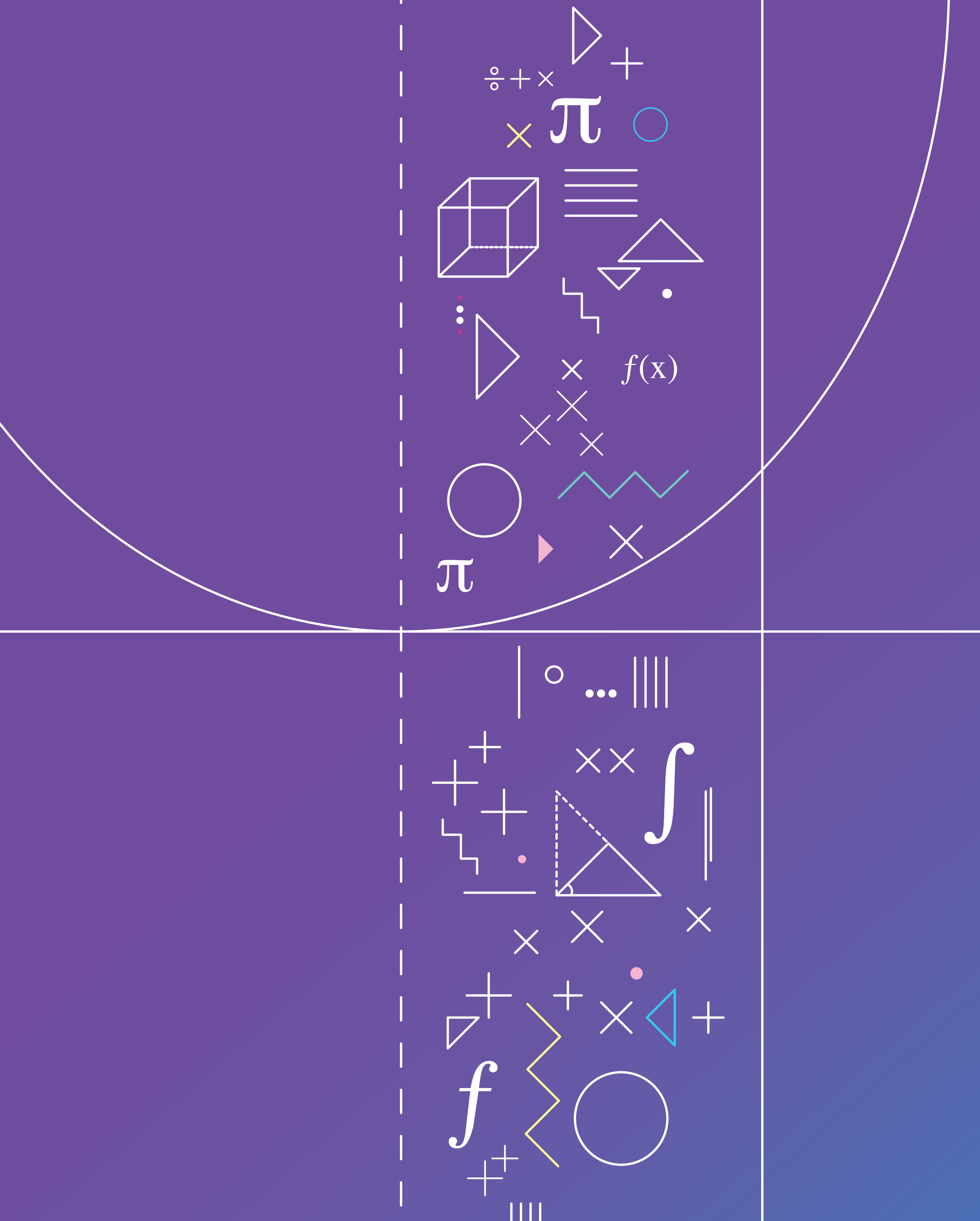
Finalmente, la **tercera propuesta** es una secuencia mediada por el programa **GeoGebra**. El objetivo es que los estudiantes construyan la idea de **solución de una ecuación** como un valor que cumple una determinada relación, apoyados en la representación gráfica de funciones.

Este recorrido nos permite compartir con ustedes varios aspectos que consideramos centrales a la hora de pensar la práctica docente. Así, transversalmente, surgen cuestiones como la validación (intrínseca a la práctica matemática), el debate en torno a diferentes representaciones de los objetos matemáticos (incluyendo sus limitaciones o alcances), el uso de herramientas; y también la idea del docente como mediador, pero a la vez como el referente del saber matemático en el aula.

Por otro lado, consideramos necesario aclarar que las autoras de este documento adherimos a una perspectiva de género. Con el fin de evitar la reiteración del femenino y del masculino, y teniendo en cuenta las dificultades en la lectura y la escritura que pueden generar el uso de la e y la x para designar a personas de distintos géneros, optamos por el genérico del masculino.

Por último, mediante este material nos proponemos abrir el diálogo con el colectivo de docentes que piensa y reflexiona cada día sobre su proyecto de enseñanza. Esperamos que puedan inspirarse en nuestras propuestas que, si bien conforman una estructura general permeable a ser intervenida, enriquecida y ajustada, fueron elaboradas con el propósito de acompañarlos en su tarea diaria.




f(x)

Propuesta 1

La enseñanza de las funciones mediante situaciones de modelización. El modelo de calentamiento del agua

INTRODUCCIÓN

En la **introducción al documento** mencionamos que vamos a concebir a la clase de matemática como una comunidad de estudio, que recupere el "hacer" de la disciplina. Entre las actividades que conforman este "hacer" aparece una de suma importancia: la modelización.

Patricia Sadovsky (2005, pp. 31-32) dice al respecto:

> **Además de contribuir (...) a tener una visión más integrada de la actividad matemática, la idea de modelización realza el valor educativo que tiene la enseñanza de esta disciplina: ofrece la posibilidad de actuar sobre una porción de la realidad a través de un aparato teórico. El expresar una realidad usando una teoría ubica a quien estudia en una perspectiva de mayor generalidad, lo cual le permite apreciar el valor y la potencia del conocimiento. Acá radica un aspecto fundamental del sentido formativo que es necesario no perder de vista. Digamos también que la idea de modelización conlleva la idea de producción de conocimiento lo cual permite situar el aspecto central al que se apunta a través de la enseñanza.**

De este modo, la resolución de problemas que involucran trabajar con modelos matemáticos y la reflexión sobre estos, está en sintonía con lo propuesto en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios y en los materiales prescritos por los distintos organismos públicos. Tomando como base dichos materiales y las consideraciones mencionadas anteriormente, **presentamos una secuencia didáctica cuyo objetivo es favorecer el desarrollo de tres tipos de tareas en torno a la modelización: la producción, la interpretación y la aplicación de un modelo matemático** (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 51).

El **problema 1** intenta involucrar a los estudiantes en la producción de un modelo matemático, a partir del análisis de datos extraídos de un experimento de calentamiento de agua. La organización de los datos en una tabla de valores y su representación en un sistema de ejes cartesianos permiten abrir el debate para establecer acuerdos y definir un modelo matemático de la situación.

El **problema 2** plantea la interpretación del modelo construido en el problema anterior, a través del estudio de diferentes gráficos, su comparación y la elección del más conveniente para representar la situación a estudiar.

El **problema 3** implica la aplicación del modelo de calentamiento de agua construido, incorporando una nueva representación: la fórmula. Las preguntas tratadas pretenden generar oportunidades para que los estudiantes elaboren conclusiones y nuevas relaciones.

Los **problemas 4 y 5** tienen como objetivo profundizar el estudio del modelo, para comenzar a hacer vinculaciones entre los diferentes registros de representación[1] presentados. Se procura realizar sistematizaciones y fortalecer lo abordado en los problemas anteriores.

Por último, se presenta un apartado para trabajar en torno a **la evaluación y el estudio en la clase de matemática**, donde se abordan ejemplos e ideas que pueden enriquecer estas instancias. Se trata de pensar la evaluación como una herramienta al servicio del docente y el estudio como una práctica a ser enseñada.

Es importante remarcar que esta serie de actividades posibilitará plantear un **trabajo articulado con Ciencias Naturales**, en particular, con el Proyecto N° 2 de la serie "La Energía en la Escuela Secundaria". En la página 32 de dicho documento se plantea la construcción de un gráfico, a partir de los datos recolectados en un experimento de calentamiento de agua, y ciertas preguntas sobre la representación. Estas tareas enriquecen la comprensión del fenómeno. La secuencia que proponemos en matemática busca fundamentar y dotar de sentido a estas decisiones, focalizándose en aspectos propios de la disciplina. Por ejemplo, a partir del trabajo con esta secuencia, se puede responder a la pregunta: "¿Por qué, si los datos registrados se representan como puntos en un gráfico cartesiano, luego se pueden unir formando tramos rectos?".

Por otro lado, si bien la secuencia presentada responde a la modelización en un contexto extramatemático, también es posible realizar una que incluya estas mismas tareas a propósito de un contexto intramatemático, es decir, que se base en problemas provenientes de la misma disciplina. Por eso, **el principal valor de la modelización no está en "la aplicación de la matemática a la realidad" sino en el tipo de trabajo que permite desplegar el problema abordado**.

1) En la segunda propuesta de este mismo documento, se caracterizan los diferentes registros de representación. En particular, se brindan ejemplos de problemas para trabajar en torno al registro gráfico.

Problema 1

Ejemplo de problema que favorece la producción de un modelo

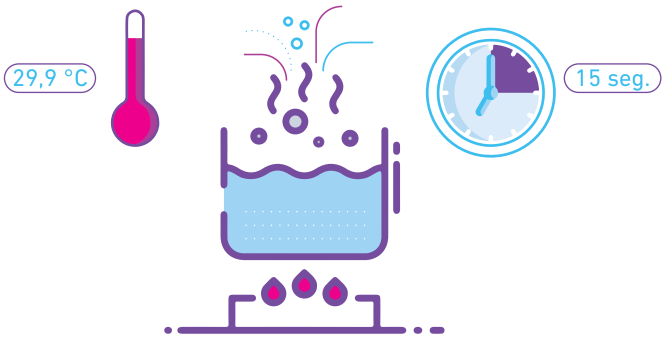
Problema 1 (primera parte)

Lean la experiencia que se describe a continuación y luego respondan las preguntas.

Experiencia

En una cocina se encontraba una olla con agua adentro. En un momento determinado, se encendió la hornalla y un cronómetro al mismo tiempo, y comenzaron a tomarse datos con la intención de registrar valores de temperatura correspondientes a instantes determinados.

Se sabe que nunca se modificó la intensidad de la llama y que la olla se mantuvo sobre la misma hornalla hasta que el agua alcanzó su punto de ebullición a los 94,9 °C. El termómetro siguió marcando dicha temperatura hasta que se apagó.



Los datos recopilados se registraron en una tabla, que puede verse a continuación:

TIEMPO (SEGUNDOS)	TEMPERATURA (°C)
10	27,9
15	29,9
26	35,2
61	50,6
96	65,5
122	75,3
145	81,5
162	88
203	94,9
230	94,9
260	94,9

Respondan en parejas las siguientes preguntas:

a) ¿Qué temperatura habrá indicado el termómetro transcurridos 20 segundos de haber iniciado la experiencia? ¿Y a los 25 segundos?

b) ¿Qué tiempo habrá indicado el cronómetro cuando la temperatura del agua alcanzó 90 °C?

c) ¿Qué temperatura habrá indicado el termómetro a los 240 segundos?

Problema 1 (segunda parte)

¿Cuál de estos gráficos elegirían para representar la situación estudiada en la primera parte? ¿Por qué?

Observación: los puntos representados en el Gráfico 1 y el Gráfico 2 corresponden a las filas de la tabla presentada en la primera parte de este problema.

Gráfico 1

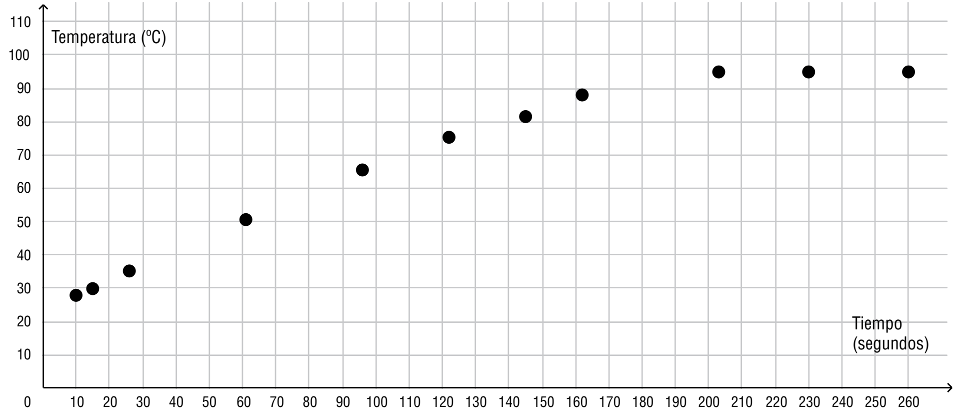


Gráfico 2

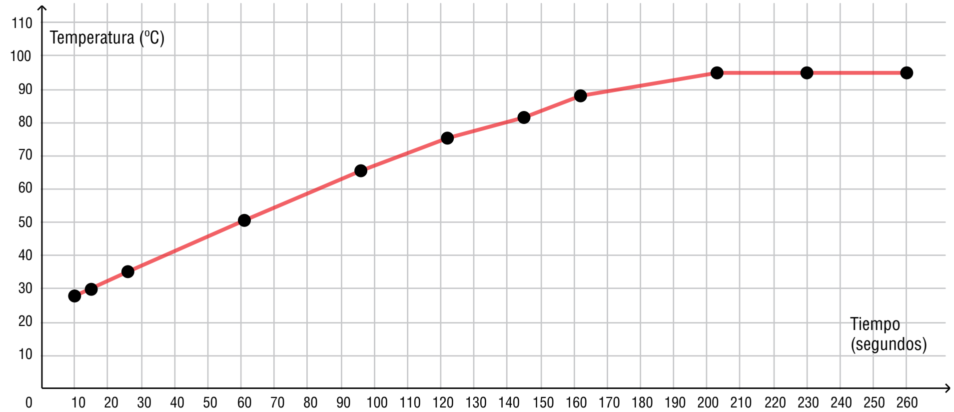
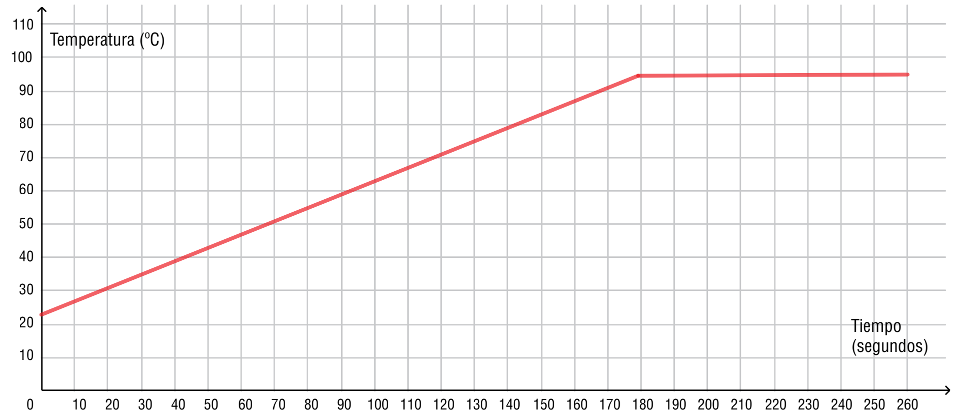


Gráfico 3



Una posible gestión de la actividad puede comenzar con la lectura compartida de la experiencia presentada. Esta actividad podrá retomar conocimientos de los estudiantes, ya sea provenientes de lo abordado en Ciencias Naturales, como de su experiencia cotidiana. Por ejemplo, es posible que algunos de ellos afirmen que la temperatura de ebullición del agua es 100 °C; sin embargo, desde las Ciencias Naturales se puede explicar que esto no siempre es así, sino que depende de ciertas condiciones, como la altitud respecto del nivel del mar, la presión atmosférica, etcétera[2].

Para el trabajo con las preguntas que se plantean en esta primera parte del problema, se puede habilitar una instancia de intercambio colectivo en la que los grupos de estudiantes comuniquen los diferentes abordajes utilizados. A continuación, analizamos algunos de ellos.

El **ítem a** propone hallar el valor de la temperatura correspondiente a un tiempo que no está en la tabla. Entre las estrategias, correctas e incorrectas, que pueden surgir es posible mencionar:

- Si se toman como referencia las primeras dos filas de la tabla, se puede observar que durante los primeros 5 segundos la temperatura aumenta 2 °C. Algunos estudiantes pueden considerar que esto seguirá sucediendo e inferir que a los 20 segundos la temperatura del agua es 2 °C mayor que a los 15 segundos. De esta manera, la temperatura a los 20 segundos es 31,2 °C.
- Como 20 segundos es el doble que 10 segundos, entonces la temperatura del agua será el doble de 27,9 °C, que es 55,8 °C.
- Seleccionar un valor arbitrario entre 29,9 °C y 35,2 °C (temperaturas correspondientes a los 15 y 26 segundos, respectivamente), argumentando que cualquiera de esos valores podría ser correcto porque "no se sabe lo que pasó entre 15 segundos y 26 segundos, ya que no fueron registrados datos".
- Calcular "el promedio" de la temperatura correspondiente a 15 segundos y 26 segundos, y argumentar que 20 segundos está aproximadamente "en el medio". Así, al hacer el cálculo $\frac{29{,}9+35{,}2}{2}$ obtendrán 32,55 °C como temperatura aproximada.

En todos estos casos enunciados será interesante recuperar los argumentos que permitieron elaborarlas. Por ejemplo, en las primeras dos estrategias, se puede apelar a los datos registrados en la tabla para mostrar contraejemplos. Las últimas dos estrategias podrían considerarse adecuadas. Debatir sobre ellas (y otras que puedan surgir) en el plano colectivo puede ser una buena idea para entender que, finalmente, no es posible dar una respuesta exacta a la pregunta planteada.

La intención es llegar a la conclusión de que **no es posible saber con exactitud cuáles son los valores que no están en la tabla, pero sí se pueden realizar aproximaciones considerando un rango de valores. Además, la situación analizada responde a un proceso continuo en el tiempo, caracterizado por el crecimiento de la temperatura que, luego de alcanzar el punto de ebullición, se mantiene constante**.

El **ítem b** posibilita retomar estrategias e ideas que se pusieron en juego en la resolución del ítem anterior; por ejemplo, aquellas asociadas a la continuidad del proceso. De esta manera es posible concluir lo siguiente: **"Podemos asegurar que alcanza 90 °C, pero no determinar con exactitud en qué momento lo hace; solo sabemos que estará en el rango entre 162 y 203 segundos"**.

En la resolución del **ítem c** se pone en juego que los datos proporcionan el mismo valor de la temperatura a partir de los 203 segundos, es decir: si se asume que la temperatura se mantiene constante a partir del segundo 203, podrían responder que su valor a los 240 segundos será de 94,9 °C. De esta manera, las estrategias utilizadas en los ítems anteriores ya no se aplican, pues la temperatura deja de crecer, pero sí sigue estando presente la idea de la continuidad del proceso.

A partir del trabajo con estos tres ítems, se puede concluir que hay dos tramos con comportamientos diferentes de la temperatura: uno creciente y luego otro constante. Éstos se pueden ver en la tabla y más adelante podrán identificarse en el gráfico.

Además, estas primeras preguntas ponen en evidencia, por un lado, la necesidad de realizar algunas hipótesis para la elaboración de las respuestas: la temperatura va aumentando a medida que pasa el tiempo hasta los 203 segundos; se trata de un proceso continuo; luego de los 203 segundos la temperatura se va a mantener constante.

Por otro lado, pone en evidencia que las respuestas obtenidas no pueden ser arbitrarias, es decir, sin una explicitación de alguna lógica matemática que les dé sustento.

Para **la segunda parte del problema 1** se espera que los estudiantes elijan el o los gráficos que consideran más apropiados para representar la situación, y puedan argumentar su elección. Algunas ideas que se pueden poner en juego en torno a los diferentes gráficos son las siguientes:

- En el **gráfico 1** fueron representados los datos de la tabla y además se puede ver que la temperatura sube hasta mantenerse constante.
- El **gráfico 2** se obtiene uniendo con tramos rectos los puntos representados en el **gráfico 1**; es decir, se

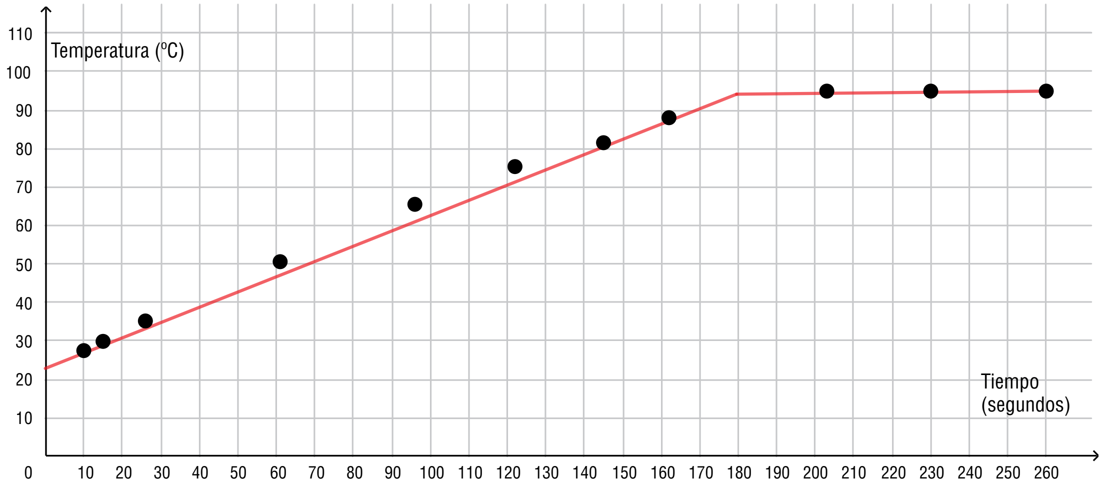
2) En el Proyecto N° 2 correspondiente a la serie "La Energía en la Escuela Secundaria" para el área de Ciencias Naturales, se propone, de las páginas 31 a 40, una serie de actividades que permiten explicar estas variaciones en la temperatura de ebullición del agua.

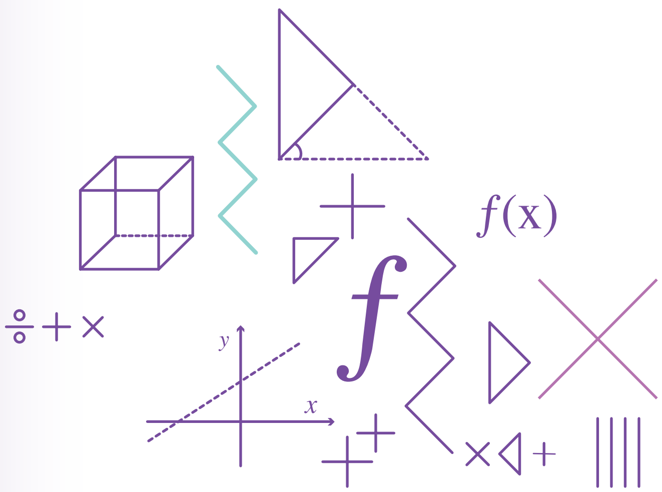
pueden evidenciar los datos de la tabla, pero también se genera una nueva información que no proviene de ella. Este "agregado" no sólo pone el énfasis en la continuidad de proceso estudiado, sino que además está asociado a un modo de estimar en el que se asume que la variación de temperatura es uniforme entre dos filas sucesivas de la tabla.

- El **gráfico 3** está formado por dos segmentos, que pueden identificarse con dos tramos del proceso analizado: el comportamiento de la temperatura en función del tiempo hasta el instante en el que el agua alcanza el punto de ebullición y el comportamiento de las mismas variables luego de éste. Si bien en dicho gráfico no se pueden visualizar los datos de la tabla correspondientes a los instantes entre 0 y 260 segundos, es posible identificar un segmento que los aproxima. El docente puede compartir, en un espacio colectivo de trabajo, un gráfico como el siguiente, que explicita lo dicho en el párrafo anterior:

También puede mencionar que este gráfico se construyó utilizando la mejor aproximación posible a los datos de la tabla mediante una línea recta. Y que esa aproximación toma como hipótesis que la temperatura de ebullición se alcanzó a los 180 segundos.

Otra cuestión que surge a partir del análisis de este gráfico es que cada tramo tiene una variación uniforme diferente, y que esta variación está asociada con el aumento de la temperatura en función del tiempo. Este gráfico, al igual que el anterior, representa el proceso estudiado como un proceso continuo.





Al finalizar el trabajo con esta segunda parte, se espera sistematizar junto a los estudiantes algunos acuerdos en relación con lo que vamos a llamar **el modelo de calentamiento del agua: la variación de temperatura es uniforme hasta el punto de ebullición, a partir del cual se mantiene constante por un tiempo. Es decir, la temperatura aumenta lo mismo en iguales intervalos de tiempo y luego de alcanzar el punto de ebullición, no cambia**.

El docente puede comentar que, para las actividades que siguen, se van a considerar gráficos similares al **gráfico 3** con el fin de representar situaciones de calentamiento de agua con las características descritas. Las razones están asociadas a que es la representación elegida por las Ciencias Naturales, debido a una conveniencia de cálculos, y que nos permitirá profundizar el estudio de la función lineal.

Problema 2

Ejemplo de un problema que implica la interpretación de un modelo

Un recipiente con agua a 55 °C fue colocado sobre una hornalla encendida. Sabiendo que alcanzó el punto de ebullición a los 14 minutos, en pequeños grupos, decidan cuál o cuáles de los siguientes gráficos pueden corresponder a la situación planteada. Expliquen cómo se dieron cuenta.

Gráfico 1

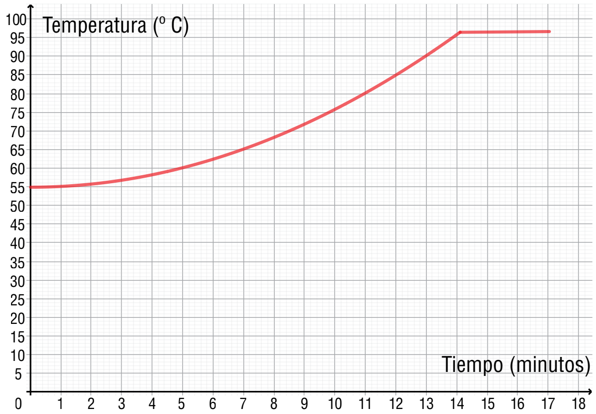


Gráfico 2

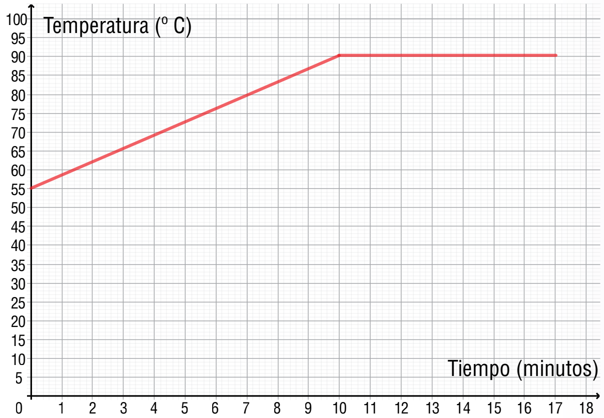


Gráfico 3

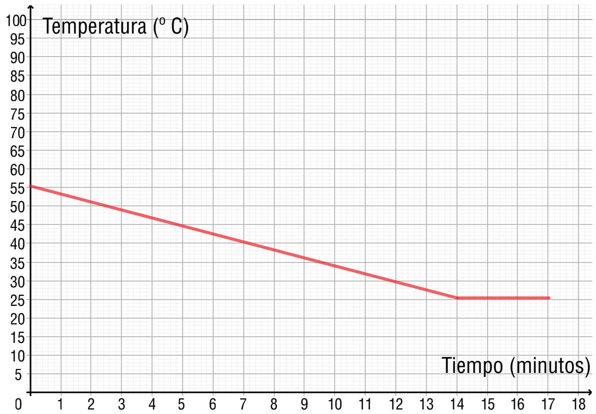


Gráfico 4

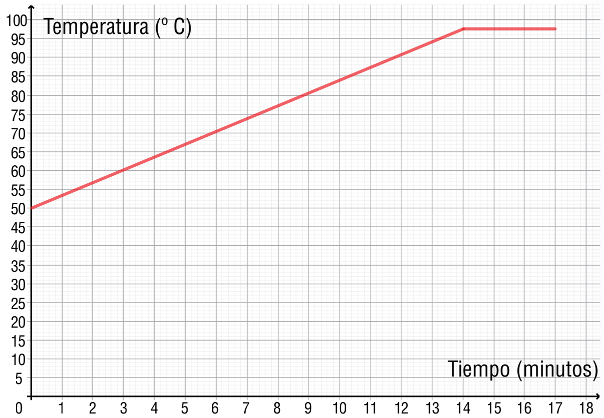


Gráfico 5

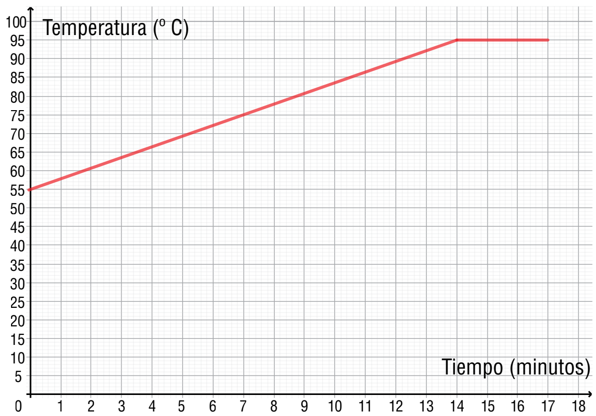
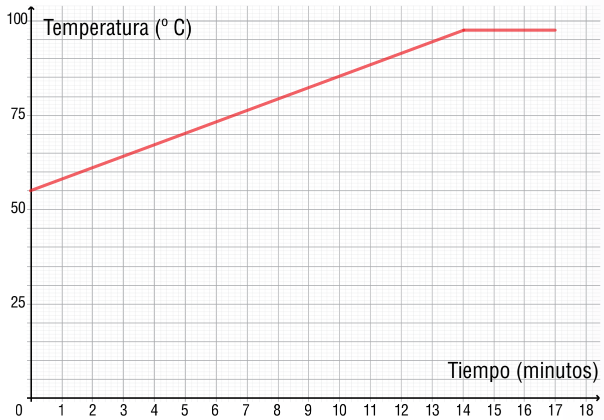


Gráfico 6



En este problema vamos a proponer diferentes representaciones gráficas para que los estudiantes puedan **interpretar un modelo matemático dado coloquialmente**. Se pretende recuperar del **problema 1** la situación explorada; es decir, el proceso de variación de la temperatura del agua al aplicarle una fuente de calor constante durante un tiempo determinado. La intención del **problema 2** es **profundizar su estudio para que cada estudiante tenga oportunidades de:**

- **relacionar las representaciones (gráficas y coloquial);**
- **argumentar a favor o en contra de la elección de un gráfico que sirva para representar el modelo asociado a la situación descripta coloquialmente;**
- **poner en juego conocimientos de lectura de gráficos cartesianos.**

Es importante remarcar que, si bien la resolución de este problema requiere que los estudiantes pongan en juego conocimientos respecto a la lectura de gráficos cartesianos, puede resultar útil para introducir este tipo de tarea. Tampoco es indispensable que manejen en profundidad contenidos relacionados con función lineal o funciones a trozos.

El trabajo con este problema puede iniciarse con una lectura conjunta de la consigna. Esto permitirá realizar las aclaraciones pertinentes y recuperar los conocimientos de los estudiantes en torno a la situación estudiada.

A medida que resuelven el problema, el docente puede recorrer los pequeños grupos con el propósito de indagar las ideas y los argumentos que van surgiendo, para luego tenerlos en cuenta en la puesta en común.

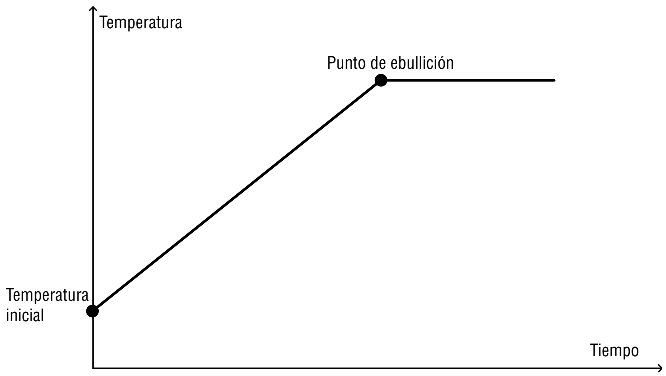
Para descartar el **gráfico 1** y **el gráfico 3,** pueden surgir argumentos que se apoyen en conocimientos relativos al modelo de calentamiento de agua; por ejemplo, el que se trabaja en el **problema 1**. En caso contrario, el docente podrá aclarar que se asume un comportamiento lineal con un primer tramo creciente, es decir, se trata de un proceso en el que la temperatura crece uniformemente en función del tiempo, hasta alcanzar el punto de ebullición, y luego se mantiene constante.

Los **gráficos 2, 4, 5 y 6** modelizan adecuadamente una situación de calentamiento de agua como la estudiada. Al poner en relación los datos provenientes del enunciado con la ordenada al origen y el intervalo en el que la recta graficada asciende, es posible llegar a la conclusión de que el **gráfico 5** y el **gráfico 6** pueden ser adecuados.

A medida que se van descartando ciertos gráficos, el docente puede proponer posibles escenarios a ser modelizados por ellos. Por ejemplo, algunas preguntas pueden ser: "El gráfico 2, ¿a qué situación corresponde?", "¿cuál sería la temperatura inicial del agua?", "¿cuánto tiempo tarda en llegar al punto de ebullición?", "¿a cuántos grados centígrados alcanza esa temperatura aproximadamente?", "¿cuánto tiempo dura la observación?", "¿cuántos grados centígrados aumenta en un minuto?", etcétera.

Otra posible intervención docente puede consistir en que, a partir de una situación análoga a la estudiada, solicitarles a los estudiantes que realicen un gráfico aproximado. O bien, analizar cuáles son los datos mínimos necesarios para poder realizar el gráfico.

Para finalizar la puesta en común se puede realizar un esquema similar al siguiente, en donde se explicite la representación gráfica del modelo y el grupo de estudiantes pueda identificar algunos elementos característicos: variables asociadas a cada uno de los ejes, temperatura inicial y punto de ebullición.



Problema 3

Ejemplo de un problema que propone la aplicación de un modelo

La siguiente fórmula permite calcular la temperatura del agua (°C) en función del tiempo (segundos) para una situación de calentamiento como la estudiada en los problemas anteriores. Se sabe que el agua alcanzó el punto de ebullición 150 segundos después de iniciado el proceso:

$$f(x) = 0{,}5 \cdot x + 25$$

a) ¿Cuál fue la temperatura del agua a los 10 segundos de iniciado el calentamiento? ¿Y a los 20 segundos?

b) ¿Cuántos segundos transcurrieron hasta que el agua alcanzó 31 °C? ¿Y hasta que alcanzó 62 °C?

c) ¿En algún momento la temperatura fue de 20 °C? ¿Cómo te diste cuenta?

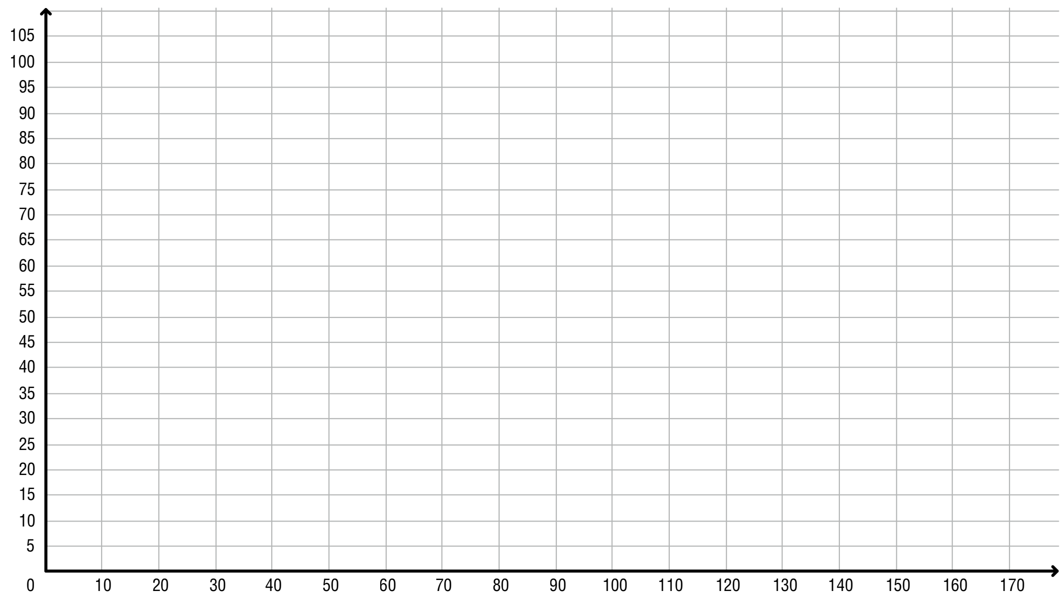
d) ¿Cuál es la temperatura inicial del agua?

e) ¿Cuál es la temperatura correspondiente al punto de ebullición?

f) Sabiendo que el agua se calentó durante exactamente 160 segundos, determiná cuál fue su temperatura en ese momento y a los 155 segundos de iniciado el calentamiento.

g) ¿Cuántos grados centígrados aumenta la temperatura del agua por cada segundo transcurrido hasta llegar al punto de ebullición?

h) En este sistema de ejes cartesianos, realizá un gráfico aproximado del proceso hasta los 160 segundos.



El propósito de este problema es que los estudiantes apliquen un modelo matemático de la situación analizada. A diferencia de los anteriores, en los que el punto de partida para el trabajo con el modelo está dado por una situación presentada en forma coloquial, en este caso se incluye una fórmula. Contar con ella brinda una buena estimación de la temperatura del agua en cada instante, de manera precisa y con cálculos simples.

Se trata de una actividad pensada para que el contexto dote de sentido a las técnicas: reemplazar x por el tiempo y resolver el cálculo, igualar la fórmula con el valor de temperatura considerado y despejar x. Y, por otro lado, también significar los elementos que componen la fórmula: ordenada al origen, pendiente, variable dependiente, variable independiente, dominio de validez.

Por ejemplo, para responder el **ítem c** los estudiantes podrán:

- Plantear y resolver la ecuación $20 = 0{,}5 \cdot x + 25$ obteniendo $x = -10$ como resultado. Interpretando esto desde el contexto estudiado se presenta una contradicción con el modelo, en el que los valores correspondientes a la variable que representa al tiempo son positivos.
- Realizar una "lectura" de la fórmula: al reemplazar x por un valor positivo o cero (pues x representa el tiempo), $0{,}5x$ también resulta positivo o cero y luego, al sumarle 25, se obtiene como mínimo 25.
- Calcular primero el valor inicial de la temperatura $f(0)$ y apelar al contexto, argumentando que, dado que se está calentando, el agua nunca podrá tener una temperatura menor a 25 °C.

Todas estas resoluciones se apoyan en el contexto de diversas maneras y es importante que, si surgen, se discutan, pues irán enriqueciendo el sentido del modelo dado y permitirán realizar generalizaciones en próximas actividades.

No se espera que el tratamiento de la fórmula se limite solamente a que reemplacen el valor correspondiente a un instante para obtener la temperatura asociada; también se busca que realicen un análisis del dominio de validez y una interpretación de los parámetros en términos del modelo que se intenta estudiar. Las idas y vueltas entre la situación y los símbolos que conforman la fórmula permiten establecer un estudio más profundo de las relaciones involucradas.

Respecto al gráfico que se solicita en el **ítem h**, su construcción puede apoyarse en el trabajo realizado con los problemas anteriores. Podrán anticipar su "forma" y probablemente surjan argumentos como: "el gráfico comienza a la altura de la temperatura inicial del agua y va subiendo hasta llegar a la temperatura del punto de ebullición en el tiempo que tarda en alcanzarlo, y después continúa en horizontal en esa temperatura porque no cambia".

Problema 4 y 5

Más problemas para trabajar el modelo de calentamiento del agua

Problema 4

Las siguientes fórmulas sirven para hallar la temperatura del agua (°C) en función del tiempo transcurrido (minutos), en situaciones de calentamiento como las estudiadas anteriormente.

Se sabe que, en todas las experiencias realizadas, el punto de ebullición se alcanzó exactamente a los 98 °C.

$f(x) = 0{,}8 \cdot x + 18$ $\qquad$ $g(x) = 45 + 1{,}5 \cdot x$ $\qquad$ $h(x) = 4{,}2 \cdot (x + 8)$

Para cada una de las fórmulas determiná:

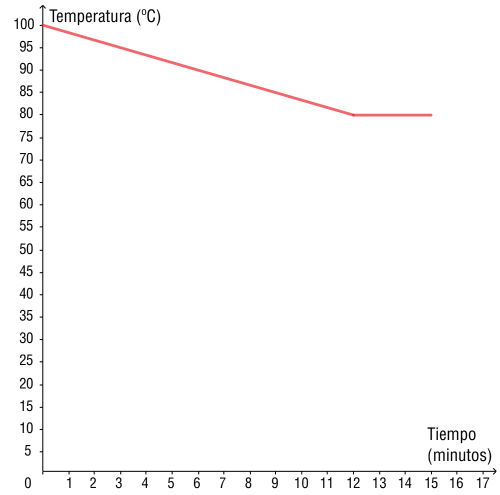
a) la temperatura inicial del agua;

b) la cantidad de grados centígrados que subió la temperatura por cada segundo transcurrido;

c) el tiempo que tarda en llegar al punto de ebullición.

Problema 5

Determiná cuáles de las siguientes representaciones podrían corresponder a situaciones de enfriamiento. ¿Cómo te diste cuenta?

La siguiente fórmula permite calcular la temperatura del agua (medida en °C) en función del tiempo (medido en minutos), después de iniciado el proceso: $f(x) = 99 + 5 \cdot x$		La siguiente fórmula permite calcular la temperatura del agua (medida en °C) en función del tiempo (medido en minutos), después de iniciado el proceso: $f(x) = 99 - 5 \cdot x$

ESTUDIO Y EVALUACIÓN

El estudio y la evaluación en matemática suelen considerarse instancias sucesivas, correlativas y enmarcadas en diferentes espacios. Tradicionalmente, se estudia fuera de la clase, de forma anticipada, y con el objetivo de aprobar un examen (que será sincrónico, individual, en clase y sobre los contenidos abordados durante un período específico).

En la actualidad, la idea de evaluación va más allá de la acreditación y es considerada una herramienta del docente para la recolección de información en torno al estado de conocimiento de los estudiantes, con el fin de tomar decisiones didácticas. El estudio se aborda no solo como una responsabilidad de los estudiantes sino también como parte del proyecto didáctico del docente; es decir, se vuelve un objeto de enseñanza.

En este sentido nos preguntamos: ¿a qué llamamos evaluar? ¿Qué particularidades tiene el estudio en matemática? ¿Con qué objetivos evaluamos? ¿Con qué objetivos se estudia en matemática?

SOBRE LA EVALUACIÓN

La bibliografía especializada en evaluación expone una variedad de formatos, métodos y clasificaciones, y todas ellas se basan en una misma idea: **la evaluación es una vía para obtener información sobre el estado de conocimiento de los estudiantes, y se hace con la intención de tomar decisiones en torno a un proyecto didáctico**.

> **A menudo identificamos a la evaluación como sinónimo de examen escrito, sin embargo, se trata de un concepto mucho más amplio que incluye todos aquellos momentos en los que solicitamos a nuestros estudiantes que demuestren conocimiento. Aun cuando la intención de evaluar no resulta explícita o evidente para ellos, como puede ser una pregunta en el marco de una discusión colectiva. Esta identificación del estado de conocimiento de nuestros estudiantes no necesariamente implica calificarlos, sino que es enriquecedora cuando implica una revisión de nuestro proyecto de enseñanza con el objetivo de tomar decisiones en el plano didáctico.**
>
> (Melchiori, Nicodemo, Sanguinetti y Trillini, 2017, p. 34)

La evaluación puede realizarse, entonces, en diferentes momentos, según los propósitos de cada docente. Los autores del libro *La matemática escolar*, basados en el trabajo de María del Carmen Palou de Maté (2003), caracterizan las evaluaciones de esta manera:

> **Diagnóstico inicial:** permite relevar los conocimientos que han adquirido los alumnos en años anteriores.
> **Diagnóstico continuo:** permite relevar información acerca de los conocimientos de los alumnos a fin de reorganizar los dispositivos de enseñanza y ponderar resultados parciales de los aprendizajes.
> **Acreditación:** permite verificar los resultados y certificar los conocimientos.
>
> *(Itzcovich, 2011, p. 216)*

Por lo tanto, es posible evaluar al inicio del trabajo, en torno a un contenido, con la intención de identificar los conocimientos disponibles; pero también hacerlo en diferentes momentos del proyecto didáctico, con el propósito de hacer un seguimiento de los conocimientos que han sido elaborados. Es decir, **se puede pensar la evaluación en términos de los objetivos del docente**.

¿Y qué pasa si queremos evaluar a los estudiantes para la acreditación de contenidos? En este caso, estaríamos hablando de un **examen** para el cual existen diferentes modalidades y formatos (oral, domiciliario, grupal, dividido en etapas, etcétera)[3].

Por último, es importante mencionar que

> (...) se trata de pensar la evaluación como un modo de obtener información para tomar decisiones didácticas. Pero es cierto que dicha información se vincula en forma muy estrecha con lo que el docente ha abordado con sus alumnos a lo largo de sus clases, en torno a uno o varios contenidos, y con los conocimientos iniciales que tienen los alumnos cuando se trata el objeto matemático en cuestión.
>
> *(Itzcovich, 2011, p. 214)*

A partir de esta cita, se puede deducir que, en instancias de evaluación que implican la acreditación de conocimientos, no es recomendable incluir actividades demasiado alejadas de lo trabajado en clase, como tampoco incluir problemas que sean exactamente iguales a los estudiados. A modo de ejemplo: si en la clase no se propuso la realización de explicaciones, se sugiere no solicitarlo en un examen, pues se estaría acreditando un tipo de tarea que no fue trabajada.

Por último, es importante considerar la explicitación de las pautas de acreditación a los estudiantes, es decir, **comunicarles cómo será el formato que tendrá el examen y qué contenidos y quehaceres[4] van a ser evaluados**. Así, podrán direccionar el estudio en pos de la acreditación.

A continuación presentamos tres actividades que responden a las categorías de evaluación enunciadas anteriormente. Pueden intercalarse en diferentes momentos de la puesta en aula de la secuencia desarrollada.

Actividad de evaluación para el diagnóstico inicial

El docente puede recorrer los grupos durante la resolución de la parte 1 del problema 1, realizar intervenciones y tomar nota de los conocimientos que circulan y las estrategias que utilizan los estudiantes para contestar a las preguntas.

Por ejemplo, se pueden relevar las herramientas matemáticas en las que se apoyan, cómo utilizan la tabla, si identifican valores que no son posibles, las anotaciones que toman, etcétera.

La recolección de esta información permite anticipar la puesta en común de este problema: qué estrategias se pueden recuperar, cuáles confrontar y qué intervenciones hacer, entre otras.

3) Para contar con más ejemplos de tipos de exámenes que pueden incluirse en la escuela, recomendamos la lectura del artículo "Evaluación", de Adriana Díaz, citado en la bibliografía.
4) El documento escrito por Michailuk y Nicodemo (2015) enumera los diferentes quehaceres involucrados en el trabajo matemático.

Actividad de evaluación para el diagnóstico continuo

Luego del trabajo con el problema 3, se puede incluir esta actividad como tarea, para que cada estudiante la realice solo en su casa y la entregue por escrito en la clase siguiente.

Tarea: Al estudiar una situación de calentamiento de agua, como la trabajada en clase, se obtiene la siguiente fórmula que permite calcular la temperatura del agua (°C) en función del tiempo (segundos).

$$f(x) = 0{,}25 \cdot x + 20$$

Se sabe que el agua alcanzó el punto de ebullición 300 segundos después de iniciado el proceso y que, luego de 360 segundos, se apagó el fuego:

a) Determiná la temperatura que alcanzó el agua cuando transcurrieron 80 segundos de iniciado el proceso.

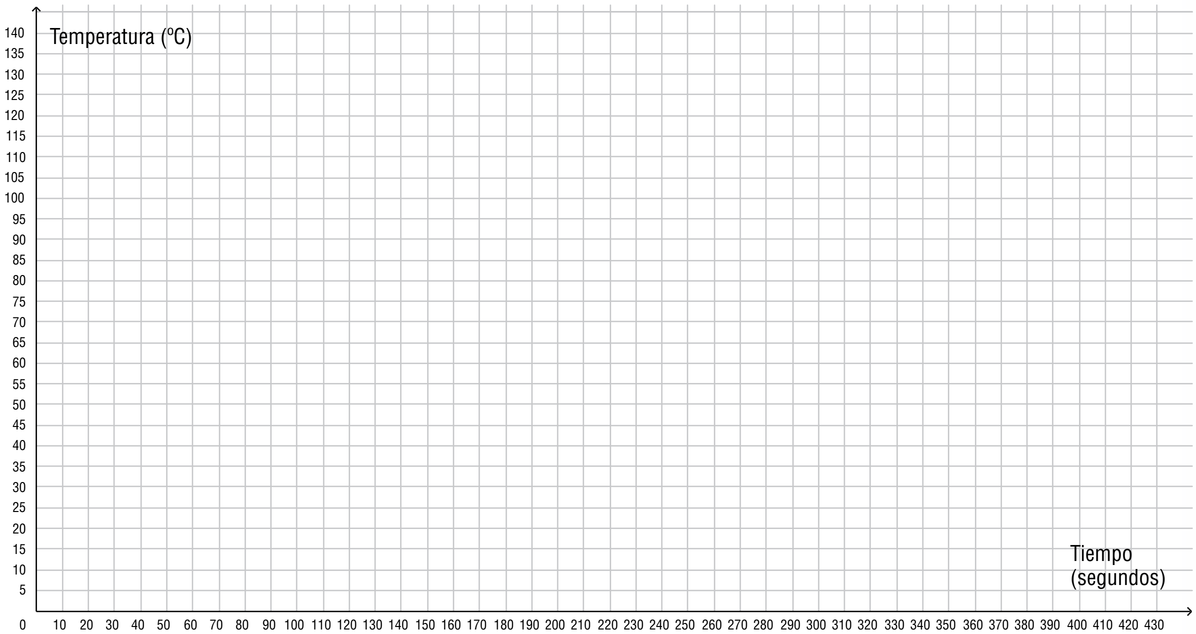
b) ¿Es cierto que a los 160 segundos de iniciado el proceso de calentamiento la temperatura del agua fue de 80 °C? Explicá tu respuesta.

c) ¿En algún momento la temperatura fue de 18 °C? ¿Cómo te diste cuenta?

d) ¿Cuál fue la temperatura a los 320 segundos de iniciado el calentamiento?

e) Por cada segundo transcurrido hasta llegar al punto de ebullición, ¿cuántos grados centígrados aumenta la temperatura del agua?

f) Realizá un gráfico aproximado del proceso hasta los 360 segundos.



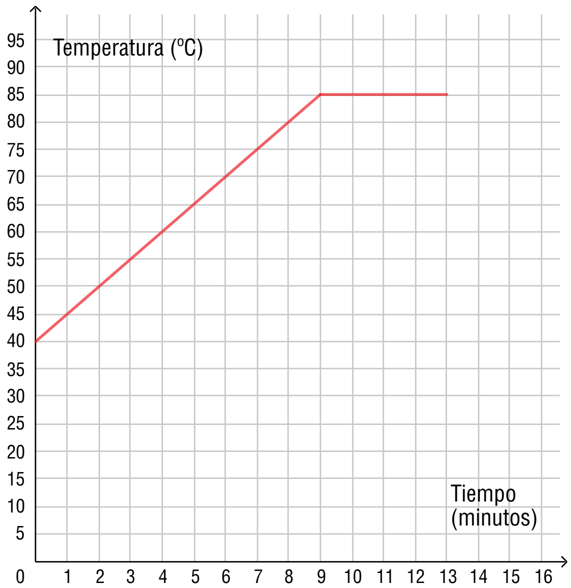
Actividad de evaluación para la acreditación

Al finalizar el trabajo con la secuencia presentada se puede proponer la realización de un examen escrito.

EXAMEN DE MATEMÁTICA

IMPORTANTE: para que un problema se considere bien resuelto debe estar acompañado de las estrategias, explicaciones y los cálculos que te permitieron arribar a la solución.

1) Al estudiar una situación de calentamiento de agua, como las trabajadas en clase, se realiza el siguiente gráfico que relaciona la temperatura del agua (°C) en función del tiempo (minutos).



Identificá y explicá cómo te diste cuenta de cuál es:

a) la temperatura inicial;

b) el punto de ebullición (aclarando temperatura y tiempo);

c) el tiempo de duración de la experiencia.

2) La siguiente fórmula permite calcular la temperatura del agua (medida en °C) en función del tiempo (minutos), hasta que el agua alcanzó el punto de ebullición a los 90 °C:

$$f(x) = 2{,}5 \cdot x + 35$$

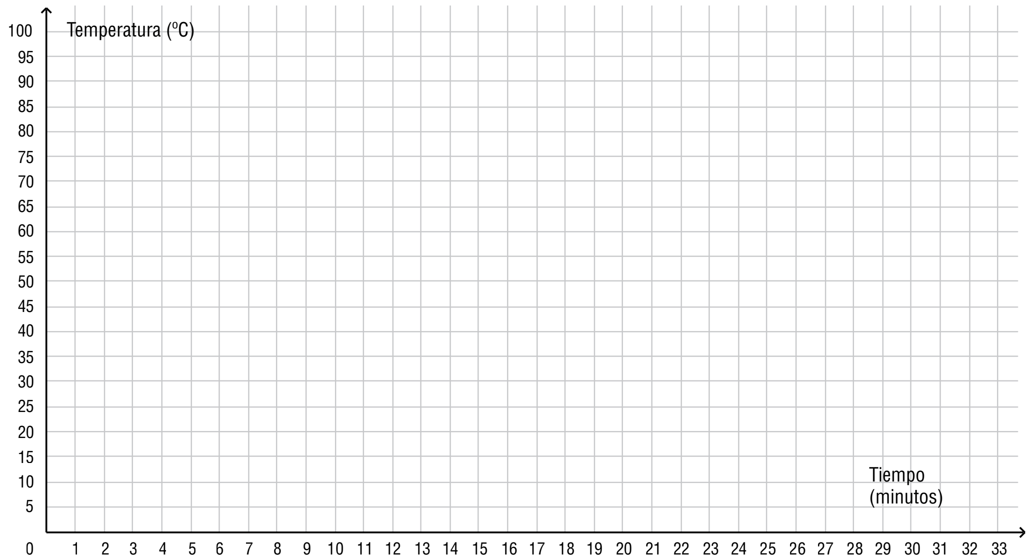
a) Respondé las siguientes preguntas:

i. ¿Es cierto que el punto de ebullición se alcanza exactamente a los 22 minutos de haber iniciado el proceso de calentamiento?

ii. ¿Es cierto que la temperatura aumenta 2,5 °C por minuto?

iii. Pedro dice que la temperatura del agua es de 45 °C exactamente a los 11 minutos de haber iniciado el calentamiento, ¿estás de acuerdo?

b) Realizá un gráfico de la situación analizada, sabiendo que el experimento duró 27 minutos.



ESTUDIAR MATEMÁTICA

En la introducción a esta sección mencionamos que, actualmente, el estudio se considera un objeto de enseñanza, es decir, a estudiar se aprende; por lo tanto, es responsabilidad del docente enseñarlo. En palabras de Paola Tarasow (2010, pp. 23-24):

> **No hay aprendizaje sin un trabajo personal del alumno. Este trabajo personal es el estudio y es responsabilidad del docente contribuir a que el alumno lo desarrolle. Entender qué significa estudiar en Matemática es un aprendizaje. Requiere que el docente prevea no sólo el trabajo en la clase y la tarea, sino otros momentos de estudio. Estudiar es mucho más que resolver ejercicios en la carpeta, aunque esta actividad esté incluida en el estudio. Supone volver hacia atrás, revisar los problemas ya hechos, analizar los errores, identificar qué tipos de problemas se pueden resolver y cuáles no con determinada herramienta, elaborar conclusiones a partir de todo lo realizado, poder comunicarlas, etcétera.**

Entonces **la finalidad del estudio no debería ser únicamente prepararse para rendir un examen, sino que debería apuntar hacia la construcción de autonomía por parte del estudiante y la reflexión sobre su propio aprendizaje.** El rol del docente es acompañar y guiar este proceso, y proponer actividades que puedan colaborar con ello.

Sobre la tarea

La **tarea** "para realizar en casa" históricamente fue vista como una actividad central de la escolaridad. Sin embargo, su naturalización invisibilizó las razones por las cuales era considerada de importancia, y el debate se redujo a cuestionar su obligatoriedad, pertinencia e inclusión en las prácticas educativas, sin reparar en el papel que cumple para la **construcción de autonomía en el estudio**.

Durante la realización de una tarea, los estudiantes tienen la oportunidad de enfrentarse solos a la resolución de problemas, y de retomar lo estudiado en las clases bajo la guía del profesor y la colaboración de sus pares. De esta manera, pueden "despegarse" del docente como fuente de valoración y validación de su trabajo, **y tomar consciencia de las actividades que pueden resolver solos y de aquellas para las cuales necesitan ayuda**. Lo deseable es que, con el transcurso de la escolaridad, se vaya delegando paulatinamente la responsabilidad de seguimiento, control y corrección de estas producciones. La **actividad de evaluación para el diagnóstico continuo** presentada en la sección sobre evaluación es un buen ejemplo de este tipo de actividad.

Sobre la carpeta

Las actividades que tienen como propósito trabajar en torno al estudio en matemática incluyen aquellas que posibilitan volver sobre lo hecho en clase y resignificarlo. Resulta necesario, entonces, contar con "buenos" materiales para poder estudiar mejor.

La carpeta es el espacio en el que se deja registro de las interacciones que se producen en la clase a propósito de un saber matemático. Tiene –o debería tener– un valor instrumental importante. Para que este valor instrumental pueda construirse, es necesario que sea el alumno quien elabore y decida cómo incluir en la carpeta los aspectos centrales del trabajo. El problema no se resolvería dictándole al estudiante aquello que el profesor considera esencial. Lo esencial tiene que estar en la carpeta, pero elaborado por el alumno.

En muchos cursos los alumnos trabajan con una guía de trabajos prácticos, y a menudo las carpetas están llenas de respuestas a ejercicios que ni siquiera están enunciados. Éstos están resueltos sin una reflexión posterior escrita, sin una discusión acerca de los errores que se pudieron haber cometido al resolverlos, sin anotaciones personales que luego faciliten el estudio. En definitiva, ese trabajo no será reutilizable. Entonces, se resolvieron muchos ejercicios, pero ¿con qué proyecto? (...) la carpeta es muchas veces el único elemento de estudio del que disponen los alumnos. Es por lo tanto fundamental que ellos aprendan a tomar apuntes para que la carpeta se convierta en un elemento realmente útil. Pero, para que esto suceda, hay que plantear actividades que les permitan valorar la función de la carpeta y mejorar los registros de lo que se realiza en clase.

(Napp, Novembre, Sadovsky y Sessa, 2000, p. 13)

Proponerles a los estudiantes que realicen (solos o en grupo) una recapitulación o una síntesis, resulta una actividad valiosa por varias razones. En primer lugar, invita a volver sobre lo estudiado, identificando los conocimientos que están disponibles y los que no, anticipando su utilización, planificando, corrigiendo, reelaborando; en suma, resignificando lo trabajado. En segundo lugar, guardar un registro escrito le da un sentido a la toma de apuntes y al uso de la carpeta, convirtiéndola en un material que no es solamente una memoria de lo hecho, sino que también es de referencia.

Para continuar, incluimos dos actividades que pueden intercalarse en la secuencia presentada en la primera parte de la propuesta. Su objetivo principal es que los estudiantes elaboren materiales de referencia para el estudio en matemática.

Actividad de estudio para utilizar la carpeta

Esta actividad está pensada para ser gestionada por el docente en el espacio colectivo. Puede proponer una recapitulación de lo hecho hasta el momento bajo la pregunta **“¿Qué aprendimos sobre el modelo de calentamiento de agua?”**.

Esto podrá tomar, en una primera instancia, el formato de una evocación durante la cual el docente irá realizando un punteo de aquello que dicen los estudiantes. Luego, a partir de preguntas más específicas, propondrá que abran la carpeta y recorran sus apuntes para completar el punteo. Algunas de las preguntas pueden ser las siguientes:

- ¿Cómo es el gráfico del modelo que estudiamos? ¿Cómo llegamos a saber que el gráfico es así? ¿Qué datos sobre el proceso de calentamiento podemos leer en él? ¿Cómo podemos producir un gráfico de calentamiento? ¿Qué datos necesitamos?
- ¿Cómo es la fórmula del modelo que estudiamos? ¿Para qué sirve la fórmula? ¿Qué datos sobre el proceso de calentamiento podemos leer en ella?

Actividad de estudio para integrar los contenidos

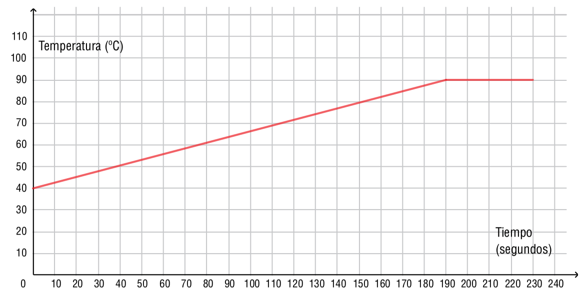
El docente puede proponer que los estudiantes realicen esta actividad en forma individual o grupal. El propósito es retomar los diferentes registros de representación utilizados y realizar la conversión entre ellos. El docente puede conceder unos minutos de la clase, en el espacio colectivo, no solo para comprender el enunciado de la actividad sino también para sugerir volver sobre la carpeta con el fin de identificar actividades que puedan servir como referencia para completar el cuadro.

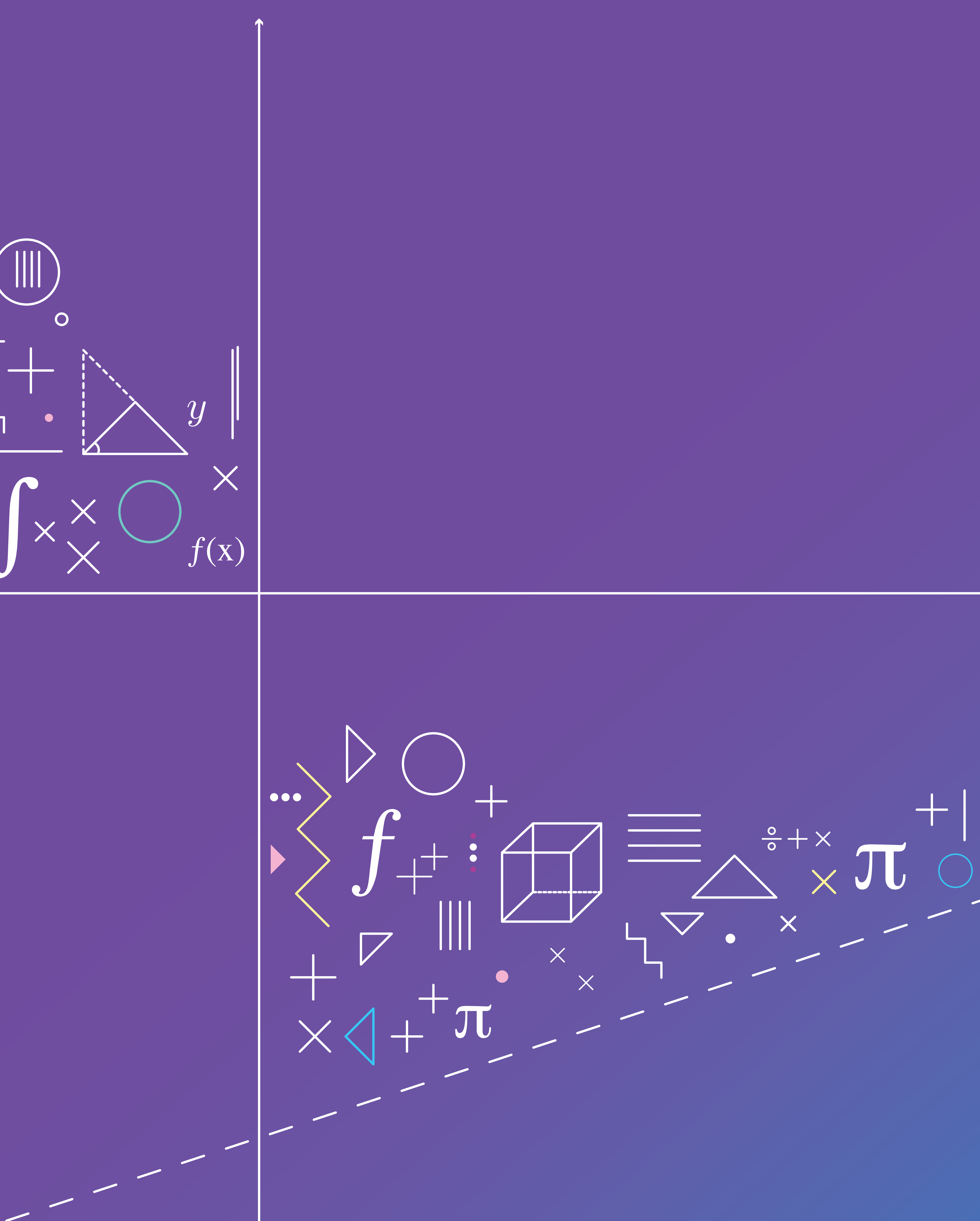
Completen el siguiente cuadro, a partir de los datos provistos en cada fila.

Actividad de estudio para la reflexión sobre el propio aprendizaje (metacognición)

Con el fin de reflexionar sobre la destreza en la resolución de actividades, el docente puede proponer a los estudiantes que realicen un rastreo de aquellas **actividades que les resultaron más fáciles y más difíciles de resolver y que expliciten las razones**.

Si esta actividad se repite durante el transcurso del año, podrá convertirse en una guía para que el estudiante construya el hábito de hacerse estas preguntas en el momento de estudiar, reflexionando así sobre su propio aprendizaje y construyendo su autonomía.

Enunciado	Gráfico	Fórmula
Un recipiente con agua a 36 °C fue colocado sobre una hornalla encendida y alcanzó el punto de ebullición a los 5 minutos a una temperatura de 96 °C. La duración total del experimento fue de 7 minutos.		
		
		$f(x) = 0{,}6 \cdot x + 35$ El punto de ebullición se alcanza a los 100 segundos. Duración total del experimento: 120 segundos.


y
f(x)
f
π
π

Propuesta 2

Problemas que involucran representaciones gráficas

INTRODUCCIÓN

El uso de gráficos es habitual en nuestra sociedad y hay un reconocimiento general acerca de su utilidad, no solo para comunicar sino también para analizar un conjunto de datos, sistematizar información, determinar relaciones entre variables y tomar decisiones. Del mismo modo, en el desarrollo de la ciencia también se destaca este tipo de representaciones, entre otras posibles, para construir y comunicar conceptos.Al mismo tiempo, la tecnología facilita, agiliza y permite generar una gran cantidad de gráficos que ofrecen oportunidades para la enseñanza. Sumado a esto, la visualización permite que los individuos creen ricas imágenes mentales acerca de un asunto o un concepto. Es posible que, **al disponer de hábitos y herramientas para tratar con gráficos, los individuos desarrollen una mirada crítica acerca de la información y las características que podrían proporcionar**.

Ahora bien, ¿qué conocimientos básicos se requieren para analizar un gráfico? ¿Cómo puede contribuir la formación en la escuela secundaria y, en particular, la clase de matemática a la lectura e interpretación de este tipo de representaciones? ¿Qué problemas y tareas serían apropiadas para que los estudiantes lograran interpretar adecuadamente un gráfico?

Este tipo de representaciones y el trabajo en torno a ellas se destacan en los núcleos de aprendizaje prioritarios. Durante el Ciclo Básico de la escuela secundaria se busca promover la interpretación de información a partir de gráficos y su relación con otras formas de representación; por ejemplo, tablas, textos, fórmulas, etcétera. Asimismo, desde los diferentes ámbitos de conocimiento matemático, como el álgebra y las funciones, o la probabilidad y la estadística, se fomenta el trabajo con problemas que utilicen gráficos para estudiar diferentes situaciones.

Es necesario tener en cuenta que, para poder leer e interpretar un gráfico, se requiere conocer los signos que lo componen; por ejemplo, los ejes cartesianos, las escalas, las marcas de referencia, los puntos, los rectángulos en los gráficos de barras, etcétera. Aunque esto tampoco es suficiente: no alcanza con conocer los signos del registro gráfico, también es importante saber cómo se relacionan y cuáles son las convenciones asociadas a cada tipo y sus elementos estructurales. En suma, **el trabajo en torno a gráficos, su lectura e interpretación, supone no solo una lectura literal, sino también el desarrollo de otras prácticas en relación con este registro:** la interpretación de datos, la potencial asociación entre ellos, la posibilidad de realizar deducciones o detectar errores que podrían distorsionar la información, etcétera.

Diversos autores señalan la importancia de representar un mismo objeto de distintas maneras, para construir un conocimiento más acabado de él. En efecto, la teoría de las representaciones semióticas de Regine Duval (1993) señala que la forma de acceder a los objetos conceptuales es mediante sus representaciones (gráficas, algebraicas, tabulares, etc.). Además, postula que las diferentes acciones con y entre los registros de representación (formulación, tratamiento y coordinación) condicionan las construcciones e ideas mentales que puede realizar un individuo respecto de los objetos matemáticos.

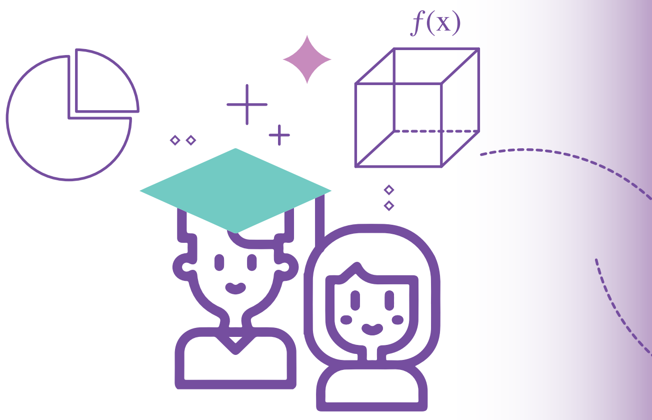
Por lo tanto, se sugiere que el trabajo con los objetos matemáticos por medio de distintas representaciones, en diferentes registros, sea parte de los contenidos incluidos en el proyecto de enseñanza.

En lo que sigue presentaremos tres bloques de actividades cuya intención es focalizar en el estudio del registro gráfico. **Cada propuesta está formada por tipos de problemas que pueden ser ajustados o adaptados por el docente, de acuerdo a cada contexto particular**.

En el **primer bloque** se presentan actividades para iniciar el estudio y la lectura de gráficos de barras. Se incluyen tareas como: elaboración de acuerdos en torno a convenciones de lectura, debates y discusiones colectivas; creación de producciones gráficas a partir de datos de distintas variables, entre otras.

El **segundo bloque** contiene tres problemas que involucran el trabajo con funciones representadas en sistemas de ejes cartesianos. Se incluyen tareas como: reflexión sobre la lectura de información del gráfico, tanto global como puntual; su vinculación con otros tipos de representaciones, como tablas y fórmulas; construcción de acuerdos sobre convenciones de lectura, etcétera.

El **tercer bloque**, a diferencia de los anteriores, comprende tres problemas de índole intramatemática con la intención de profundizar el estudio de gráficos de funciones lineales en sistemas de ejes cartesianos. Se incluyen tareas como: decisión acerca de si un punto pertenece o no al gráfico de una función y análisis del registro más conveniente a utilizar según la situación (gráfico, tabla, fórmula).

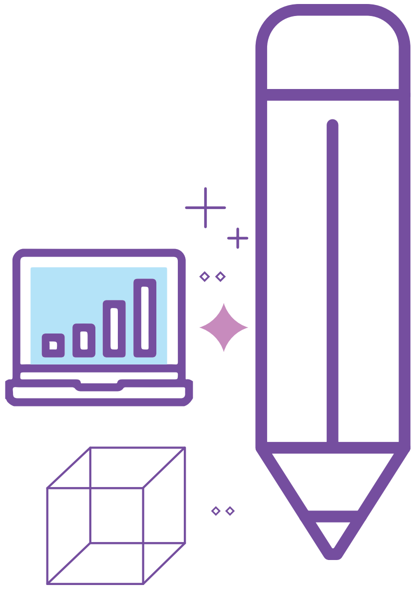


BLOQUE 1.
PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN TRABAJAR CON GRÁFICOS DE BARRAS

Todos nos hemos enfrentado alguna vez al desafío de leer e interpretar gráficos de barras en escenarios que no son necesariamente escolares. Es posible encontrarlos en ámbitos científicos, culturales y, por supuesto, en medios de comunicación. Se trata de representaciones que, en general, no resultan del todo ajenas para los estudiantes; sin embargo, al indagar un poco más respecto a cómo leen e interpretan los gráficos de barras y qué posición toman acerca de la información representada, es probable que surjan diferentes niveles de lectura (Arteaga, Batanero, Cañadas, Contreras, 2011) que podrían derivar en conclusiones erróneas. Esta es una de las razones por las cuales es importante que nos ocupemos de su enseñanza en la escuela.

Diversos autores han intentado describir la naturaleza de la cultura estadística y constructos relacionados con ella, tales como "conocimiento estadístico" y "razonamiento estadístico". Aunque hay desacuerdos entre las distintas definiciones, todos comparten la necesidad actual de que los ciudadanos sean capaces de tratar con diversos tipos de informaciones estadísticas y sus representaciones que se les presentan por distintos medios de comunicación y en distintos contextos de su vida.

(Arteaga, Batanero, Cañadas, Contreras, 2011, p. 58)



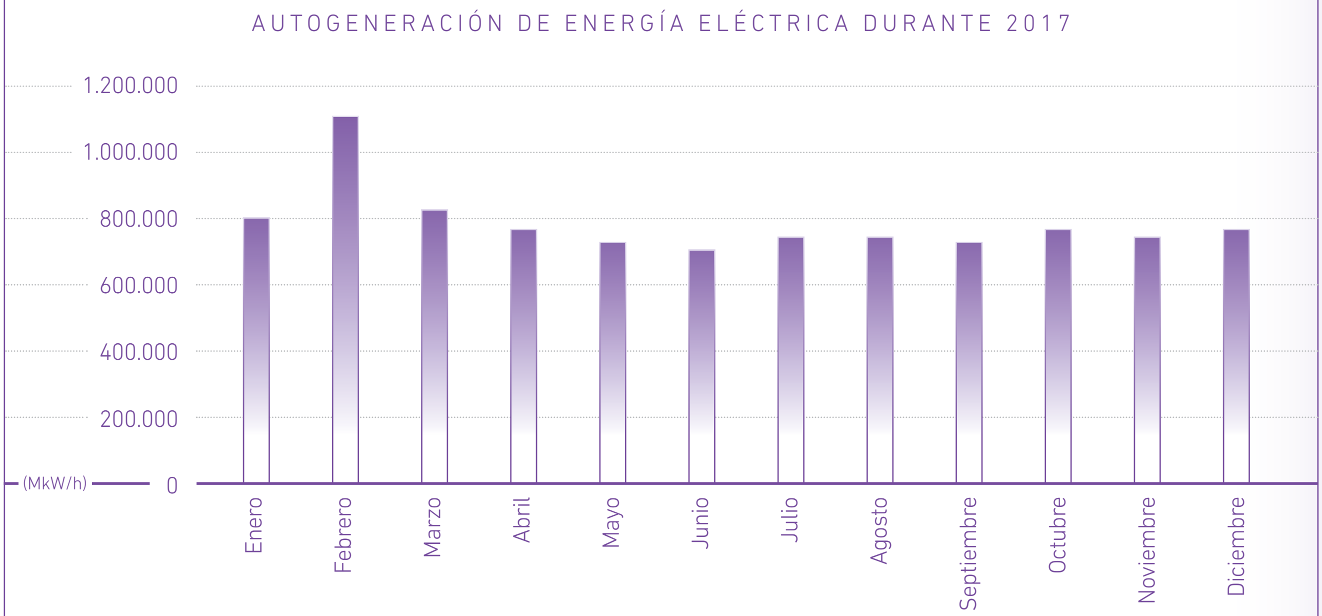
Por otro lado, los gráficos de barras también se estudian en otras materias, y su análisis presenta características particulares según se trate de Ciencias Sociales, Naturales, Educación Física, etcétera. **De esta manera, el tratamiento dado por la matemática es específico de la disciplina, en donde el gráfico también es considerado un objeto de estudio en sí mismo; por lo tanto, esto también debería ser parte de la enseñanza**.

Por último, nos gustaría mencionar que el trabajo con gráficos de barras es una buena entrada al estudio de las representaciones gráficas en matemática. Los conocimientos previos de nuestros estudiantes pueden ser puntos de partida interesantes para generar discusiones en el aula y comenzar a cuestionarlos, tarea que es posible abordar desde los primeros años de la escuela secundaria.

Entonces, ¿cómo podemos enseñar a leer gráficos de barras? ¿Con qué tipo de problemas? ¿A partir de qué tareas? ¿Qué tipos de gráficos de barras podríamos incluir? ¿En qué contextos? ¿Cuáles pueden ser las ventajas y las limitaciones de estas representaciones? ¿Cuáles son sus convenciones de lectura?

Estas son algunas de las preguntas que enmarcan la propuesta que presentamos a continuación, compuesta de dos problemas cuya intención es atender los asuntos didácticos mencionados en los párrafos anteriores.

Problema 1. En el siguiente gráfico[5] se muestra la cantidad de energía eléctrica autogenerada (en MkW/h) para cada uno de los meses del año 2017, en Argentina.



a) ¿Cuál fue el mes en el que hubo mayor autogeneración de energía eléctrica? ¿Y menos?

b) ¿Cuántos MkW/h se autogeneraron en enero? ¿Y en junio?

c) Analicen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen en cada caso y comptan sus estrategias con el resto de la clase.La cantidad de MkW/h autogenerados en el año 2017 es…

   i) menor a 1.200.000.

   ii) menor a 14.400.000.

   iii) mayor a 8.400.000.

   iv) aproximadamente 9.440.000.

d) Decidan cuál de las siguientes tablas puede corresponder al gráfico analizado. Expliquen cómo lo pensaron.

TABLA 1

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
MkW/h	800.000	1.100.000	810.000	780.000	700.000	690.000	710.000	710.000	700.000	780.000	770.000	780.000

TABLA 2

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
MkW/h	800.000	1.100.000	820.000	780.000	700.000	720.000	710.000	710.000	700.000	780.000	770.000	780.000

5) Fuente: Instituto Nacional de Estadística y Censos de la República Argentina (INDEC).

El propósito de este primer problema es que los estudiantes tengan la oportunidad de:

- desplegar sus conocimientos previos sobre la lectura de información de gráficos de barras;
- elaborar estrategias para estimar y discutir colectivamente estas estimaciones;
- cuestionar lo que visualizan en el gráfico y respaldar afirmaciones con argumentos matemáticamente válidos;
- relacionar la información dada en tablas y en gráficos de barras.

Para comenzar el trabajo con este problema, el docente puede habilitar un espacio de discusión en el que los estudiantes desplieguen los conocimientos previos que tienen en torno a la representación de información en gráficos de barras. Por ejemplo, a partir de las preguntas: "¿Qué información brinda este gráfico?", "¿cómo se dan cuenta?", "¿cómo lo leen?", "¿qué tienen en cuenta para realizar esta lectura?", "¿qué variables aparecen relacionadas?".

También podrían surgir dudas respecto al contexto (¿qué es la autogeneración de energía?, ¿qué significa MkW/h?). En este sentido, **el docente puede aprovechar la ocasión para articular la propuesta con el área de Ciencias Naturales[6], o indagar previamente sobre estas cuestiones pero considerando que el objetivo no es profundizar en ellas sino realizar un estudio matemático de la situación analizada**.

Las preguntas incluidas en el ítem a permiten trabajar sobre convenciones de lectura de gráficos de barras. A diferencia de las del **ítem b**, estas preguntas pueden responderse con exactitud a partir de la lectura directa del gráfico.

Es importante notar que hay otras convenciones capaces de motivar la discusión en el aula y que el docente podría traccionarlas indagando acerca de por qué las barras tienen el mismo ancho, si esto está relacionado con la cantidad de días (que es aproximadamente la misma), por qué son equidistantes dos barras consecutivas, etcétera.

Otro asunto que puede surgir a partir de las preguntas del ítem b es que la información brindada por el gráfico resulta insuficiente para responder con precisión la segunda pregunta; aunque la primera también podría cuestionarse, por ejemplo, preguntando: "¿Qué es lo que permite asegurar que la cantidad de MkW/h en enero fue de 800.000?".

Un objetivo en la enseñanza de la matemática es que los estudiantes se sientan habilitados para cuestionar lo que se visualiza y sean capaces de respaldarlo con argumentos válidos; es decir, que puedan notar que las respuestas son ambiguas cuando se hacen afirmaciones acerca "de lo que se ve". Pero también la comunidad-clase puede establecer acuerdos en esta práctica; por ejemplo, acordando que "cuando la altura de una barra 'coincide' con la línea horizontal correspondiente a un valor del eje vertical, este valor se considera exacto".

En el **ítem c** se les propone a los estudiantes que determinen si las afirmaciones acerca de la cantidad de energía autogenerada en el transcurso del año representado son verdaderas o falsas. Dado que la información para decidirlo no se presenta de manera directa en el gráfico, se espera que cada estudiante apele a estrategias personales de estimación; por ejemplo, respecto a los dos primeros incisos, es posible proceder de la siguiente manera:

- En i) podrían responder (incorrectamente) que se trata de una afirmación verdadera, basándose en el hecho de que las alturas de las barras están todas por debajo de 1.200.000 MkW/h. Este error puede deberse a que, en lugar de considerar la suma de la energía autogenerada estén considerando la energía correspondiente a cada mes. Este abordaje puede dar lugar a una discusión colectiva acerca de qué es lo que solicita el problema. Otro posible abordaje (que es correcto) es notar que la suma de la energía autogenerada en los dos primeros meses resulta mayor de 1.200.000, ya que cada barra supera los 600.000 MkW/h.
- En ii) la afirmación es verdadera y también puede argumentarse su validez a partir de estimaciones. Dado que todas las barras tienen una altura menor a 1.200.000, su suma será menor a 14.400.000 que es el resultado de hacer 1.200.000 x 12.
- Otra estrategia correcta que puede surgir a propósito de ii) es aproximar la altura de cada una de las barras y sumar esos valores aproximados.

La puesta en común de estos abordajes puede dar lugar a una discusión alrededor de cuál de ellos posibilita hallar "la mejor aproximación" a la respuesta, es decir, cuál de ellos genera el valor "más cercano al real".

Una intervención interesante a propósito de esta actividad es que el docente solicite la elaboración de afirmaciones (una verdadera y una falsa), similares a las del ítem c, que se puedan responder utilizando el gráfico de barras.

El **ítem d** permite trabajar en torno a la coherencia entre los registros de representación. Si en el gráfico una barra tiene mayor altura que otra, significa que en aquel mes fue autogenerada mayor cantidad de energía que en el segundo. Esta situación debería poder interpretarse en la tabla de valores. En el problema planteado, la segunda tabla muestra una contradicción en los meses de mayo y junio, respecto a su representación gráfica.

6) Este contenido se trabaja en profundidad en el cuadernillo Guía N° 1, p. 45, también perteneciente a esta serie.

Problema 2. En la siguiente tabla se registró la cantidad de Kw/h correspondiente al consumo de energía eléctrica de una familia tipo durante 2020:

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Kw/h	300	280	270	250	250	325	350	300	280	280	250	280

a) En grupos, realicen en un afiche un gráfico de barras con los datos de la tabla.

b) Sobre una de las paredes del aula, peguen los gráficos que produjeron. Analicen entre todos: ¿en qué se parecen y en qué se diferencian?

c) Si se quiere representar en un gráfico de barras el consumo bimestral de esta misma casa, ¿cómo lo harían? ¿Cómo creen que va a cambiar respecto al gráfico anterior? ¿Y si fuera quincenal?

En el **problema 1** se propusieron actividades cuyo objetivo era leer e interpretar un gráfico de barras dado. En este problema, las actividades tienen la intención de profundizar este estudio, a partir de la producción de un gráfico de barras y de la reflexión acerca de este trabajo.

Al mismo tiempo, **este problema posibilita abrir la discusión sobre las decisiones que se pueden tomar a la hora de elaborar un gráfico, y sobre cómo éstas se ponen en juego en la comunicación mediada por este tipo de representaciones.**

Para resolver los ítems a y b los estudiantes pueden recuperar lo realizado en el problema 1 y resignificarlo en la tarea de producir un gráfico. Por ejemplo, se pueden retomar ideas como la coherencia, los valores aproximados, etcétera.

Se espera que cada grupo construya criterios propios acerca de cómo elaborar el gráfico; para ello es importante que el docente no dé indicaciones que orienten la toma de decisiones, sino que acompañe este trabajo solicitando que las expliciten y validen. En esta indagación cada estudiante podrá ir formulando los argumentos que luego utilizará para defender su posición en el espacio colectivo de trabajo.

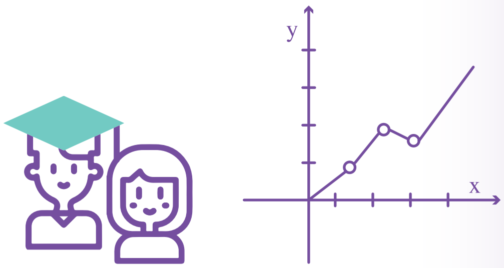
Puede surgir una cuestión asociada a la elección de la escala para los ejes. Al respecto, será importante considerar sus características para que el gráfico sea representativo de lo que se quiere comunicar. Además, resultaría interesante que el docente presentara dos gráficos con diferentes escalas y en los que sea posible leer o interpretar distinta información. Por ejemplo, uno con una escala en el que las barras "parezcan" de la misma altura y otro en el que estén diferenciadas.

Otra actividad puede consistir en reflexionar sobre qué escala es más conveniente para no hacer visible determinada información o para enfatizarla. De esta manera, se evidencia la importancia de la representación elegida a la hora de comunicar.

Asimismo, asociada a esta cuestión, también puede discutirse la relevancia de que el eje vertical respete una escala y qué consecuencias en la lectura de la información podría tener un gráfico que no lo hiciera.

La actividad incluida en el ítem c tiene como propósito anticipar los cambios que podrían producirse en el gráfico anterior cuando los datos son agrupados bajo diversos criterios. **Este trabajo de anticipación y de argumentación de dichas afirmaciones genera la posibilidad de que los estudiantes visibilicen conjeturas, concepciones y conocimientos (previos, erróneos), y puede ser aún más enriquecedor si se lleva a cabo en una instancia colectiva.** Si el docente lo cree conveniente, a posteriori puede presentar los gráficos, realizados con alguna aplicación (por ejemplo, con hoja de cálculo) o hechos a mano, con el fin de contrastarlos.

Será importante destacar que, en el caso del gráfico quincenal, la información presentada en la tabla es insuficiente para elaborarlo. Algunos estudiantes podrían proponer que quincena se represente como la mitad del consumo de energía correspondiente al mes; sin embargo, también es posible considerar otras proporciones.



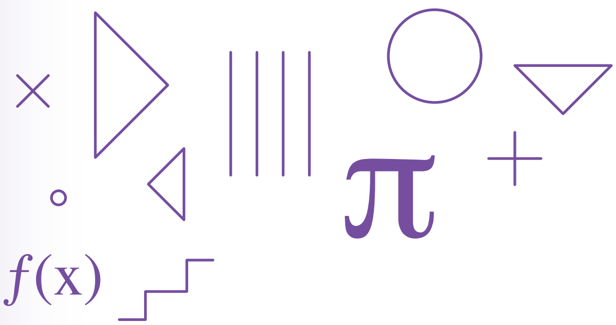
BLOQUE 2.
TRES PROBLEMAS SOBRE GRÁFICOS CARTESIANOS

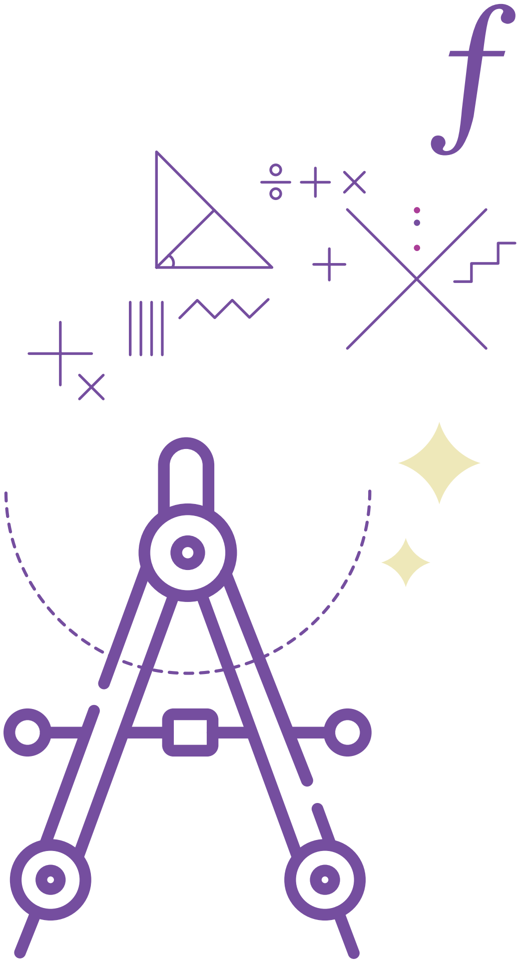
El estudio de funciones a partir de su representación gráfica en un sistema de ejes cartesianos se considera uno de los contenidos centrales de la matemática escolar. En los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios es posible identificarlo en los últimos años de la escuela primaria y durante toda la escuela secundaria. Pero también se puede reconocer el trabajo con este tipo de representaciones en otras asignaturas, por ejemplo, en Ciencias Naturales, a propósito del análisis de diferentes procesos y con su propia especificidad.

Al igual que ocurre con los gráficos de barras, las representaciones en el plano cartesiano se entraman en el día a día de nuestros estudiantes. Un ejemplo notable fue la irrupción de este tipo de representaciones gráficas durante 2020, cuando los medios de comunicación se enfrentaban a la necesidad de transmitir información relativa a la pandemia de COVID. Esto dejó en evidencia no solo la practicidad de estos gráficos sino también la complejidad de su lectura e interpretación.

Queremos formar estudiantes que se enfrenten a estas representaciones con una mirada crítica y sean capaces de producirlas teniendo en cuenta la información que desean comunicar. Para ello es importante que estos conocimientos no se den por sentado y se generen oportunidades para profundizarlos y ajustarlos.

Por otro lado, asociadas a la representación gráfica de funciones en el plano cartesiano, aparecen otras representaciones que también son objeto de estudio en matemática: las tablas y las fórmulas. Como mencionamos en la introducción, es esencial que nuestros estudiantes se enfrenten a esta variedad de representaciones, pero además que puedan ir construyendo relaciones entre ellas.





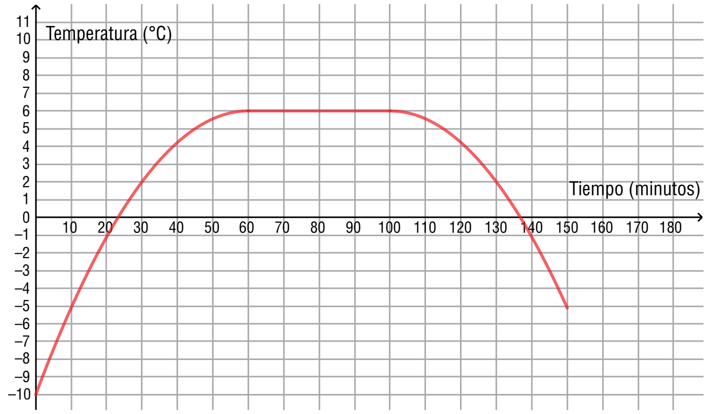
La serie de tres problemas que presentamos a continuación están enmarcados en contextos extramatemáticos y retoman algunos temas vinculados a Ciencias Naturales, trabajados en el Proyecto N° 2 de la serie "La Energía en la Escuela Secundaria". Esto genera la oportunidad de realizar un trabajo articulado en ambas asignaturas.

En estos problemas se indagan especificidades de la lectura de información en gráficos cartesianos, trabajo que puede apoyarse en la secuencia propuesta en el **bloque 1**. Además se plantean actividades destinadas a explicitar convenciones y errores frecuentes, y a realizar tanto lecturas puntuales como globales.

Otra dimensión por considerar es que estas actividades colaboran en la visibilización de los límites y las ventajas de utilizar el plano cartesiano para representar funciones, a la vez que exponen la necesidad de contar con otras representaciones (como una fórmula) para ganar precisión.

Al igual que en el **bloque 1**, además de los enunciados de los problemas, compartiremos un breve análisis didáctico de cada uno de ellos, con sugerencias de gestión e intervenciones que podrían resultar enriquecedoras.

Problema 1. El siguiente gráfico representa la temperatura de una sustancia desde el momento en que se la introdujo en un microondas.



a) ¿Cuál era la temperatura de la sustancia a los 30 minutos? ¿Y a los 60 minutos?

b) ¿Es cierto que a los 120 minutos la temperatura de la sustancia era de 4 °C? ¿En algún otro momento tuvo la misma temperatura?

c) ¿En algún momento la temperatura de la sustancia fue de 11 °C?

d) ¿Cuál fue la temperatura mínima de la sustancia? ¿Y la máxima? ¿En qué momento se registró cada una?

Este primer problema permite indagar en los conocimientos que poseen los estudiantes sobre la lectura de información proveniente de gráficos cartesianos. El docente puede proponer, previamente a su realización, un análisis colectivo del gráfico presentado. Por ejemplo, a partir de preguntas como: "¿qué información se puede extraer de este gráfico?", "¿cuáles son las variables que se relacionan?", "¿la temperatura cambió o no cambió a lo largo del tiempo?", etcétera.

Esta evaluación posibilitará realizar un diagnóstico del estado de conocimientos de los estudiantes y generar un intercambio entre ellos que puede funcionar como un buen punto de partida para aquellos que no tuvieron la oportunidad de enfrentarse a este tipo de actividades antes.

Los **ítems a y b** introducen actividades que permiten realizar una lectura puntual de la información representada y poner en el centro de la escena algunas convenciones de lectura en este sistema de ejes. Esto es así porque, para poder leer el gráfico, resulta necesario conocer el funcionamiento interno del plano cartesiano y cómo se lo utiliza en la representación de funciones. Entre algunas cuestiones que lo caracterizan, mencionamos las siguientes: los ejes resultan accesorios, pues funcionan de referencia y no son el gráfico de la función; todo punto en el plano relaciona dos valores, uno correspondiente a cada variable; la intersección entre los ejes corresponde al cero de ambos; etcétera.

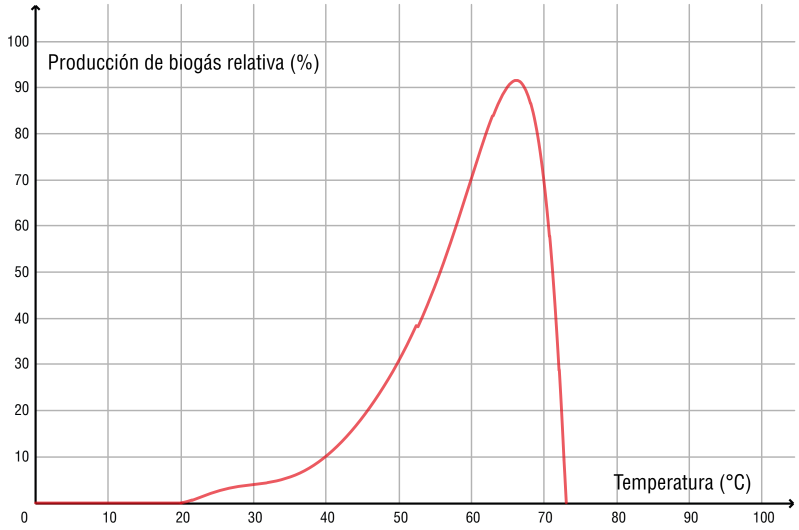
En el marco de la clase podría surgir un cuestionamiento acerca de la precisión de la respuesta, a partir de la lectura directa del gráfico. Esta duda puede ser retomada por el docente con la intención de realizar un acuerdo: cuando la curva pasa por un nodo de la cuadrícula, podemos leer los valores correspondientes "de manera exacta". Por ejemplo, considerando el gráfico presentado, podemos afirmar que en 130 minutos la temperatura alcanzó los 2 °C; pero que, para 110 minutos, no es posible precisar la temperatura, aunque sí es posible aproximarla.

La intención del **ítem c** es poner de manifiesto que la temperatura de la sustancia nunca es de 11 °C, ya que la curva que describe su relación con el tiempo transcurrido no alcanza dicho valor. El docente puede aprovechar esta pregunta para solicitar a los estudiantes que indiquen otros valores de temperatura que no hayan sido alcanzados por la sustancia.

El **ítem d** posibilita que los estudiantes realicen una lectura global del gráfico de la función y, de esta manera, identifiquen valores mínimos y máximos de temperatura. Sin embargo, será necesario que también hagan una lectura puntual, con el fin de determinar cuáles son esos valores y en qué momentos se alcanzan. En este punto puede surgir un debate acerca de cuáles son los minutos en los que se alcanza la temperatura máxima.

Es probable que mencionen los valores escritos en el eje horizontal (60, 70, 80, 90 y 100) sin tener en cuenta los valores intermedios. El docente puede recuperar esta respuesta y orientar la discusión para llegar a concluir que aproximadamente "entre 60 y 100 minutos la temperatura se mantiene constante en su máximo valor".

Problema 2. En el siguiente gráfico se representa la producción de biogás[7] relativa, en función de la temperatura.



a) ¿Cuál fue el porcentaje de producción relativa de biogás a una temperatura de 50 ºC? ¿Y a 30 ºC?

b) ¿A qué temperatura se encontraban las bacterias cuando el porcentaje de producción relativa de biogás fue del 70? ¿En alguna otra temperatura tuvo el mismo porcentaje?

c) ¿Es cierto que, cuando las bacterias se encontraban a una temperatura de 45 ºC, el porcentaje de producción era del 20?

d) Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justifiquen sus respuestas:

1) A los 66 °C la producción relativa de biogás fue de 91 %.

2) La producción de biogás relativa fue máxima entre los 60 °C y los 70 °C.

3) La producción máxima de biogás relativa fue superior al 90 %.

Los **ítems a y b** posibilitan la recuperación de cuestiones estudiadas en el problema 1, a propósito de la lectura puntual del gráfico. Será importante notar que, a diferencia del gráfico del problema anterior, en éste la temperatura está representada en el eje horizontal.

La segunda pregunta formulada en el ítem a requiere que se establezca un valor aproximado para la producción de biogás relativa, ya que el gráfico, para dicho valor de temperatura, no pasa por un nodo de la cuadrícula. Será importante mencionar que, si bien no es posible determinar con exactitud cuál fue el porcentaje de biogás producido a los 30 °C, sí podemos estar seguros de que ese porcentaje se encuentra entre el 0% y 10%; de hecho, se trata de un valor cercano al 5 %, pues la intersección de la curva con la línea correspondiente a 30 °C está ubicada aproximadamente en la mitad entre el 0 % y 10 %.

El **ítem c** permite debatir estrategias de estimación para la producción de biogás relativa a los 45 °C. Por ejemplo, algunos estudiantes quizá aseguren que, a partir de las características del gráfico, la producción relativa de biogás es del 20 % en la mitad de 40 °C y 50 °C. Si bien este razonamiento está bien orientado, el gráfico no permite precisar esta afirmación.

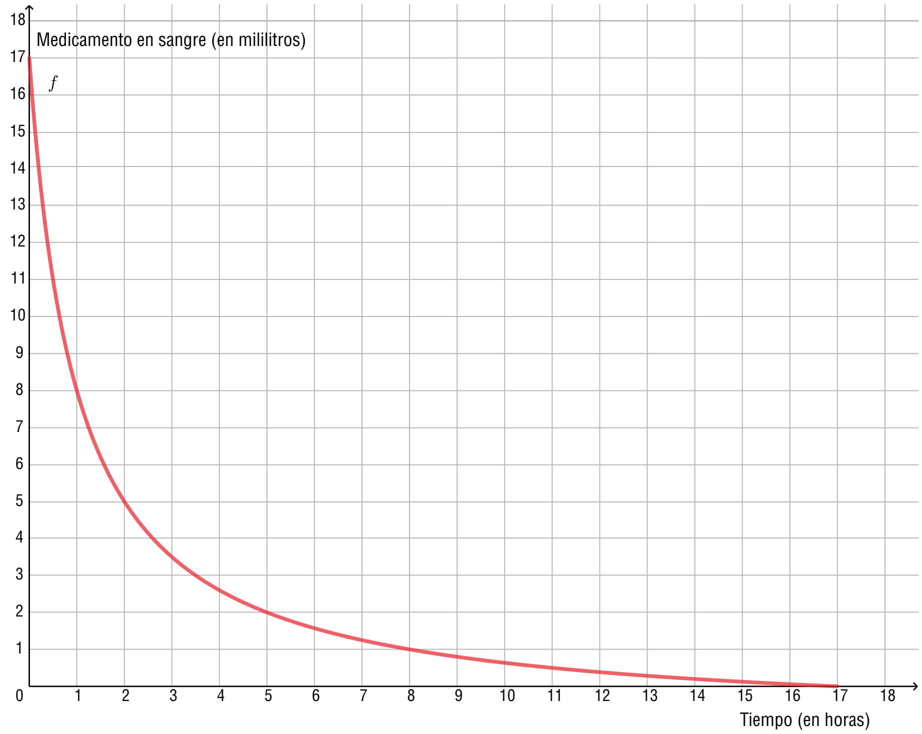
La intención del **ítem d** es concluir que es posible realizar afirmaciones basadas en razonamientos apoyados en estimaciones y no únicamente en información precisa.

7) El biogás es un gas que se genera en medios naturales o en dispositivos específicos, por las reacciones de biodegradación de materia orgánica, mediante la acción de microorganismos (bacterias metanogénicas, etc.) y otros factores, en ausencia de oxígeno (esto es, en un ambiente anaeróbico).

Problema 3. La siguiente fórmula se usa para calcular la cantidad de mililitros de un medicamento en sangre, en función de las horas transcurridas desde que fue administrado.

$$f(x) = \frac{18}{x+1} - 1$$

Si se representa dicha relación en un sistema de ejes cartesianos, resulta el siguiente gráfico:



a) Completen la tabla:

x	0	1	2	3	5	6	10	16	17
$f(x)$									

b) Decidan si las afirmaciones son verdaderas o falsas, y expliquen su respuesta.

- La cantidad inicial de medicamento administrada fue de 8 mililitros.
- Transcurridas exactamente 4 horas desde que se administró el medicamento, la cantidad de mililitros es exactamente 2,5.
- A las 7 horas desde que se administró el medicamento, la cantidad de mililitros es mayor a 1.

c) Elaboren dos afirmaciones (una falsa y una verdadera) que no se puedan responder utilizando solamente el gráfico.

d) ¿Qué representa, en términos del problema, el punto de intersección del gráfico de la función y el eje ? ¿Es posible saber sus coordenadas?

Este es el primer problema del bloque en el que los estudiantes se enfrentan a la utilización de una fórmula para hallar información relativa a una función. Específicamente, la utilizan para obtener las coordenadas de un punto perteneciente al gráfico. Es importante remarcar que, si bien se trabaja con una función homográfica, no se espera que el docente trabaje con los estudiantes las características de este tipo de funciones.

Para completar la tabla del **ítem a**, los estudiantes pueden extraer información basándose en el gráfico. **A pesar de que algunas columnas se pueden completar con valores aproximados, es asunto de este problema discutir que, a partir de la fórmula, se puede determinar si estos valores son exactos o no; e incluso se pueden verificar los que sí se obtienen de manera precisa.**

El docente también puede reforzar esta idea incluyendo otros valores para la variable independiente que no aparecen en la tabla. Por ejemplo, explicitando que en el gráfico se puede leer el valor correspondiente a 8 horas, pero que también se obtiene dicho valor utilizando la fórmula. Esta intervención puede servir para introducir la notación $f(8) = 1$.

El **ítem b** busca poner en diálogo la representación gráfica con el contexto del problema. Además, permite volver a discutir la precisión de la lectura del gráfico y la utilización de la fórmula. Para determinar si las primeras dos afirmaciones son verdaderas o falsas, quizá algunos estudiantes se apoyen únicamente en la lectura del gráfico. Así, puede resultar interesante contrastar esta estrategia con otras posibles que apelen a la utilización de la fórmula dada. Por ejemplo, en el caso de la segunda afirmación, se puede calcular $f(4)$.

Para determinar la veracidad de la tercera afirmación no es necesario apelar a la utilización de la fórmula, aunque podría surgir como estrategia calcular $f(7)$. La lectura directa del gráfico evidencia que el valor correspondiente a 7 horas está comprendido entre 1 y 2 mililitros, y, por lo tanto, la afirmación resulta verdadera.

El propósito del **ítem c** es que los estudiantes se apoyen en lo trabajado en los ítems anteriores para generar sus propias afirmaciones. El docente puede proponerles que las compartan en un espacio colectivo, con el fin de discutir en torno a ellas. Algunas afirmaciones que pueden surgir son: “la cantidad de medicamento en sangre a las 6 horas de haber sido administrado es menor a 2 mililitros”, “transcurridas 17 horas desde que fue administrado, sigue habiendo medicamento en sangre”, etcétera.

Como respuesta al **ítem d** los estudiantes pueden decir que la intersección con el eje x representa el momento en el que el medicamento ya no se encuentra en la sangre, pues la cantidad de mililitros es cero. Dado que en el gráfico no resulta claro que este valor es 17, el docente puede cuestionar la precisión de esta lectura y proponer que se valide a través de la utilización de la fórmula, calculando $f(17)$.

Como conclusión del trabajo realizado a propósito de este problema, el docente puede sugerir que se reflexione acerca de:

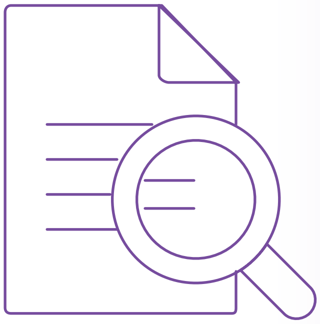
- **Las limitaciones del gráfico y la potencia de contar con una fórmula para determinar con exactitud valores correspondientes a las coordenadas de puntos que pertenecen a él.**
- **La posibilidad de enriquecer el análisis a partir de contar con varias representaciones de la función (gráfico, fórmula, tabla) y poder relacionarlas.**

BLOQUE 3.
FUNCIONES LINEALES Y GRÁFICOS

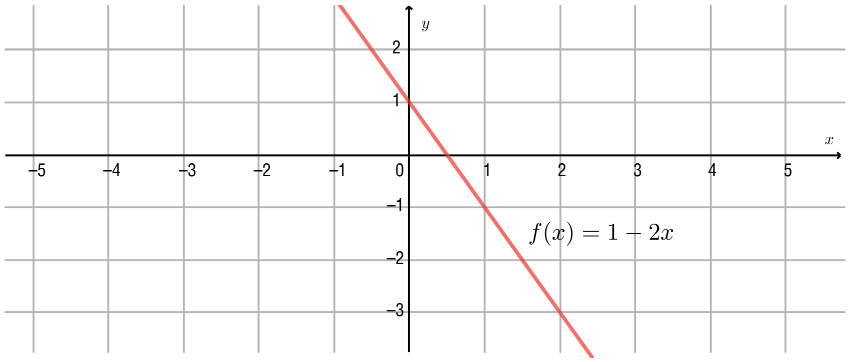
En los bloques anteriores se propusieron problemas que involucran la lectura de información proveniente de contextos extramatemáticos; en particular, se recuperaron aquellos relacionados con el concepto de energía y su tratamiento en las Ciencias Naturales. Esto posibilita articular un trabajo con esa asignatura, ganar amplitud de análisis y establecer una mirada específica de la matemática para comprender y poner en valor las prácticas que se llevan adelante en esta disciplina. Sin embargo, comprendemos que no todos los contenidos de la materia reciben el tratamiento adecuado si solo se abordan contemplando contextos externos a la matemática; y la función lineal es un ejemplo de ello. **Si bien nos parece interesante comenzar su estudio mediante el trabajo con problemas contextualizados en situaciones extramatemáticas, también es importante que nuestros estudiantes sean capaces de entender la función lineal con sus características propias, las que solo se hacen visibles cuando se incluye una mirada intramatemática.** En palabras de Mónica Agrasar (2011, p. 83):

> **Es cierto que incluir contextos vinculados a la vida cotidiana ofrece, muchas veces, un apoyo a la hora de involucrarse en la resolución de un problema o permite evaluar la razonabilidad de algunos resultados y esto ha llevado a pensar que los contextos cotidianos resultan una vía de acceso privilegiada, y a veces exclusiva para abordar el trabajo con las herramientas matemáticas. Sin embargo, este abordaje no es suficiente, o no siempre es pertinente, para acceder al modo de pensar y producir conocimiento propio de la matemática.**
> **(...)**
> **Por otra parte, cabe señalar que muchas veces, con la intención de vincular la matemática con la vida real, se cae en lo que Gelsa Knijnik (1998, citada por Jaramillo, Torres y Villamil, 2006) llama "parodia de lo cotidiano", que genera un efecto opuesto al que se espera. Es decir, se presentan situaciones forzadas, a veces inverosímiles, en las que los datos y las preguntas están al servicio de hacer cálculo o aplicar un método de manera rutinaria y sin que nadie fuera de la escuela tenga acceso a ese tipo de datos o necesidad de conocer la respuesta que se obtiene.**

La propuesta que presentamos a continuación está constituida por tres problemas que retoman y amplían el trabajo con gráficos cartesianos realizado en el bloque 2, pero en los que la función lineal es trabajada desde un marco geométrico y funcional. La noción de pertenencia de un punto a una recta, la idea de pendiente como resultado de movimientos en el plano y la extensión infinita de la recta, son ejemplos de cuestiones que pueden ser abordadas con el estudio de este tipo de problemas. En éstos la representación gráfica de la función y el interjuego con otras representaciones (tabla, fórmula) cobran una importancia fundamental.



Problema 1. En el siguiente gráfico aparece representada la función dada por la fórmula $f(x) = 1 - 2 \cdot x$



a) Decidan si los siguientes puntos pertenecen al gráfico:
- *(1; –1)*
- *(2; 2)*
- *(–2; 3)*
- *(4; –7)*
- *(100; –199)*

b) Escriban un punto que pertenezca al gráfico de la función y cuya coordenada x sea mayor que 20.

c) Escriban un punto que no pertenezca al gráfico de la función y cuya coordenada x sea mayor que 20.

Este primer problema busca llevar la atención de los estudiantes hacia lo siguiente: pensar el gráfico como el conjunto de puntos que cumplen una condición, determinar la pertenencia de un punto a una recta, presentar la notación como par ordenado e instalar un vocabulario específico. Se trata de explicitar convenciones y de hacer visibles los conocimientos (o desconocimientos) que muchas veces asumimos que tienen nuestros estudiantes respecto al trabajo con gráficos en el plano cartesiano. Por ejemplo, el gráfico de este problema, a diferencia de los trabajados en los bloques anteriores, no posee etiquetas de magnitudes sobre los ejes, sino que aparecen nombrados como x e y, que serán las variables.

El uso de la fórmula de la función también es un asunto para trabajar en este problema, incluso si los estudiantes ya tienen experiencia utilizándola en problemas cuyo contexto es extramatemático.

En el **ítem a,** los primeros dos puntos pueden identificarse en el sistema cartesiano representado y permiten discutir la cuestión de pertenencia a una recta: si "cae" sobre ella, pertenece; en caso contrario, no pertenece.

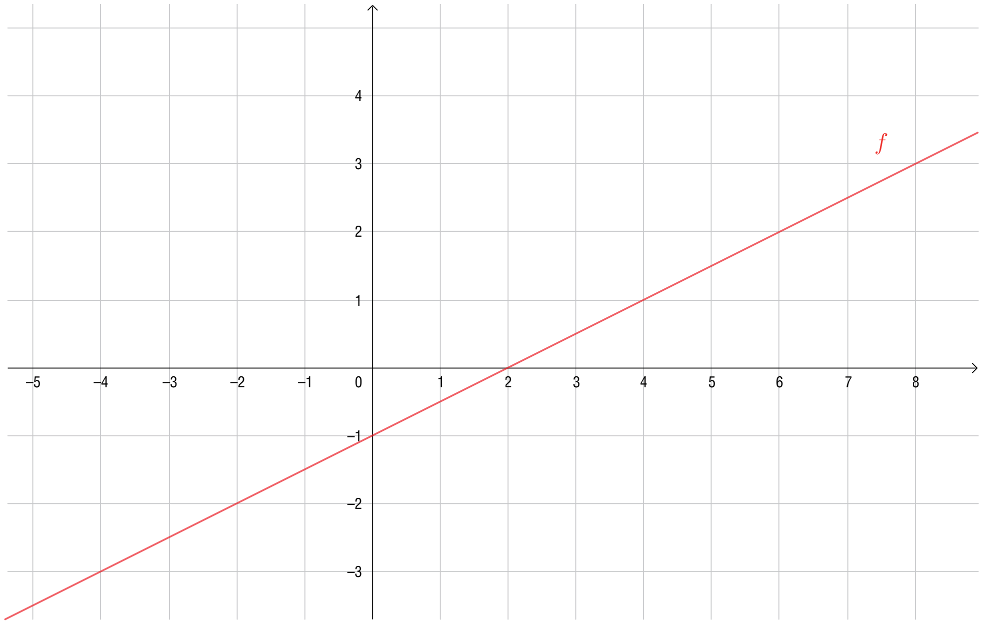
Respecto al tercer, cuarto y quinto puntos, algunos estudiantes podrían optar por las siguientes estrategias:

- Extender la recta y los ejes para ubicar el punto en el sistema de coordenadas.
- Apelar a la fórmula, recuperando la idea de que un punto pertenece al gráfico de una función si, al reemplazar el valor de la variable x en ella y hacer el cálculo, se obtiene el valor de la variable y (en caso contrario, el punto no pertenece).
- Afirmar que no pertenece al gráfico de la función, dado que no es posible visualizarlo.
- Asumir que dos puntos sobre la recta se relacionan de forma tal que, posicionándose sobre uno de ellos y moviéndose cierta cantidad de unidades en forma horizontal y vertical (como indica la pendiente), se cae sobre otro punto que pertenece a ella.

El docente puede recuperar estos abordajes en un espacio colectivo para analizarlos y compararlos (conveniencia, precisión, etcétera), pero también para poner en relación ambos registros de representación.

Los **ítems b y c** permiten reinvertir los conocimientos trabajados en el **ítem a**, acerca de la pertenencia o no de puntos. En este sentido, la estrategia más conveniente para generar los puntos solicitados en el enunciado es la de utilizar la fórmula.

Problema 2. A partir del siguiente gráfico de la función lineal $f(x)=\frac{1}{2}x-1$ completen la tabla de valores.



x	-4	-2	0		3,5		10	50
$f(x)$	-3			0		2		

Este problema retoma lo trabajado en el **problema 1** en torno a la lectura de puntos en el sistema de gráficos cartesianos. Sin embargo, en este caso, en lugar de decidir si un punto pertenece o no a la recta, los estudiantes se enfrentan a la tarea de determinar la coordenada correspondiente a un punto que pertenece a ella.

Para completar la tabla es posible que los estudiantes realicen una lectura directa del gráfico. En particular, para el caso de la quinta columna es probable que aproximen el valor de $f(3,5)$ pues el gráfico no cae sobre un nodo de la cuadrícula. El docente puede aceptar esta estrategia de manera provisoria para luego verificarlo con el uso de la fórmula.

En el caso de la columna correspondiente a $x=10$, pueden poner en juego estrategias como las del problema anterior. También podría surgirles la necesidad de usar la fórmula de la función, que será fundamental para completar la última columna de la tabla.

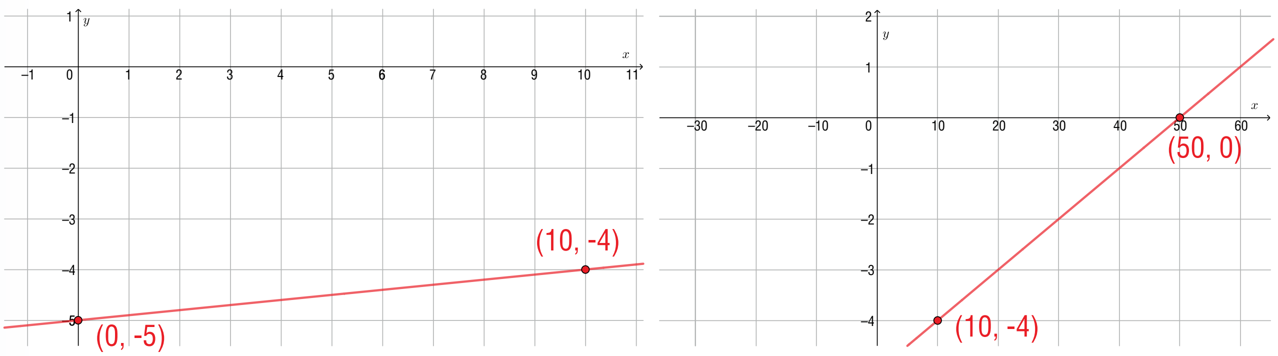
El docente podrá proponer una instancia colectiva en la que compartan las estrategias que usaron para completar las distintas columnas de la tabla. **Será importante que se ponga el foco en el registro de representación utilizado en cada caso y se socialicen argumentos que respalden las elecciones tomadas. Esta intervención permitirá que los estudiantes vayan construyendo criterios personales para la elección de un registro de representación apropiado, según la información que se desee obtener.**

Por ejemplo:

- Si el punto se puede ubicar en un nodo, es conveniente basarse solo en el gráfico.
- Si el punto no se puede ubicar en un nodo, es conveniente usar la fórmula.
- Si el valor de x es mayor que 8 o menor que −5, es conveniente usar la fórmula.

El trabajo con este problema es una buena oportunidad para establecer relaciones entre los diferentes registros de representación (fórmula, gráfico y tabla). En este caso, la tabla contiene información que no se puede "ver" en el gráfico (por ejemplo, la correspondiente a las últimas dos columnas) pero también el gráfico contiene información que no está en la tabla. A partir del uso de la fórmula se pueden recuperar valores que no es posible leer en ninguno de los dos registros anteriores y en eso se basa su potencia.

Problema 3. A continuación se presentan dos gráficos de funciones lineales:



a) ¿Es cierto que el punto *(0; –5)* pertenece a los dos gráficos presentados? ¿Y el punto *(50; 0)*?

b) Decidan si la siguiente fórmula podría corresponder a alguno de los gráficos anteriores.

$$f(x)= \frac{1}{10} \cdot (x + 10) - 4$$

Antes de iniciar el trabajo con este problema, quizá sea conveniente que el docente discuta con el grupo de estudiantes qué información se puede extraer de los gráficos presentados. Este tipo de intervención suele resultar sumamente interesante porque puede llevar a visibilizar concepciones e implícitos respecto al trabajo con gráficos de funciones lineales. Una convención que comúnmente pasa desapercibida y que es importante explicitar es, por ejemplo: si hay un punto marcado sobre la recta y está acompañado de la escritura de par ordenado, ese punto pertenece a ella.

El **ítem a** intenta generar la necesidad de apelar a la noción de variación uniforme para determinar si el punto *(0; –5)* pertenece o no al segundo gráfico. Un posible razonamiento es el siguiente: "Si desde el punto *(10; –4)* avanzo 10 unidades hacia la derecha y luego 1 unidad hacia arriba, vuelvo a caer en un punto que se encuentra sobre la recta. Asumiendo que esto sucede a lo largo de toda ella, se puede deducir que, si me muevo 10 unidades hacia a la izquierda, debo bajar una unidad para obtener otro punto sobre la recta. Así, el punto *(0;–5)* pertenece a ella".

El razonamiento anterior está asumiendo varios supuestos: que el "comportamiento" de la recta es siempre el mismo (es decir, la variación es uniforme) y que la recta se extiende más allá de lo que se ve en el gráfico. También se considera que la recta representada en el segundo sistema de ejes contiene puntos que caen justo en nodos de la cuadrícula.

Una gestión de la actividad interesante al finalizar el ítem a puede partir de la siguiente actividad: "Hasta ahora vimos que hay tres puntos que pertenecen a las dos rectas presentadas, ¿habrá algún otro punto que pertenezca a ambas?". El docente puede ir anotando en el pizarrón los puntos que van encontrando y orientar la discusión para llegar a concluir colectivamente que tienen todos sus puntos en común. Es decir que se trata de dos representaciones distintas de la misma recta.

Es probable que los estudiantes recurran a diferentes estrategias para arribar a esta conclusión: asumir que por dos puntos pasa una única recta, notar que ambas rectas tienen la misma ordenada al origen y la misma pendiente, hallar las fórmulas correspondientes a cada una y verificar su equivalencia. **Vemos que, de acuerdo al estado del conocimiento que presentan los estudiantes al momento de resolver el problema, pueden surgir diferentes abordajes que consideramos valiosos para que el docente ponga en relación con el resto de la clase**.

Respecto al **ítem b**, en caso de que los estudiantes sepan cómo hallar la fórmula de las rectas representadas, se puede discutir la equivalencia de ellas con la dada. Si no, es posible recurrir a otra idea: dados dos puntos (con diferente abscisa) queda determinada una única función lineal, por lo que alcanza con ver que dos puntos de los gráficos cumplen con la fórmula dada.


f(x)

Propuesta 3

Un nuevo abordaje
de las ecuaciones mediado
por GeoGebra

INTRODUCCIÓN

La propuesta que presentamos en este apartado está pensada para estudiantes del final del Ciclo Básico de la escuela secundaria, que posiblemente ya tuvieron contacto con ecuaciones desde una mirada algebraica. Se distingue de las anteriores al incorporar una herramienta tecnológica, GeoGebra, como un aspecto esencial del trabajo.

La enseñanza tradicional de las ecuaciones suele poner el énfasis en las técnicas de despeje, por lo que la idea de solución de una ecuación queda desdibujada y asociada al "final de la técnica". En consecuencia, los estudiantes tienen pocas oportunidades de reflexionar acerca de qué es una solución y cómo decidir si un determinado valor lo es, independientemente de la técnica algebraica utilizada. *Según Carmen Sessa (2005, p. 69):*

> **Los alumnos se ven entonces enfrentados a las tareas de "poner en ecuación" un problema y "despejar la incógnita" (con todas las reglas asociadas) como las primeras experiencias en el terreno del álgebra. Es la posición mayoritariamente adoptada en nuestro país (...) Para muchos alumnos, las ecuaciones son "cosas que se despejan", y dominar las reglas de esta técnica suele ser una fuente inagotable de dificultades para ellos.**

El abordaje de las ecuaciones que se propone en la secuencia presentada parte de una interpretación geométrica-funcional. Su fin es construir la idea de solución de una ecuación, así como dotar de sentido a aquellas que poseen varias soluciones o cuyo conjunto solución es vacío.

Si bien se incluye el trabajo con ecuaciones cuadráticas, no se trata de una secuencia que tenga como objetivo estudiar ese contenido específico. Su propósito es que cada estudiante pueda apropiarse de una estrategia (que podrá devenir en técnica) apoyada en el registro gráfico generado por GeoGebra. La intención es explorar, conjeturar y validar posibles soluciones para las ecuaciones dadas. De este modo estarán en condiciones de abordar la resolución de ecuaciones que requieren herramientas algebraicas con las que todavía no cuentan.

Concretamente, se propone un conjunto de actividades en las que se espera construir la idea de solución de una ecuación como valor que cumple una igualdad. Por ejemplo, si la expresión es $2x-7=1$ se puede decir que el valor $x=5$ no cumple la igualdad (así como tantos otros) ya que $2 \cdot 5-7$ no es igual a 1. En cambio, el valor $x=4$ sí cumple la igualdad pues el cálculo $2 \cdot 4-7$ coincide con 1.

Por otra parte, en algunos problemas también aparece la idea de conjunto solución de una ecuación como aquel formado por todos los valores que cumplen dicha igualdad. Justamente, la noción que se comienza a construir viene asociada a la de ecuación como función proposicional.

Debido a la variedad de usos que se le puede dar a la tecnología en ámbitos educativos, nos interesa explicitar nuestra mirada en relación con este asunto. Las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), y concretamente el programa GeoGebra, se incorporarán pensando en la enseñanza y a partir de una ***inclusión genuina***, en palabras de Mariana Maggio (2005); en contraposición a su inclusión por "moda", para dar una apariencia de modernidad, por distintas presiones o porque hay que hacerlo (inclusión efectiva).

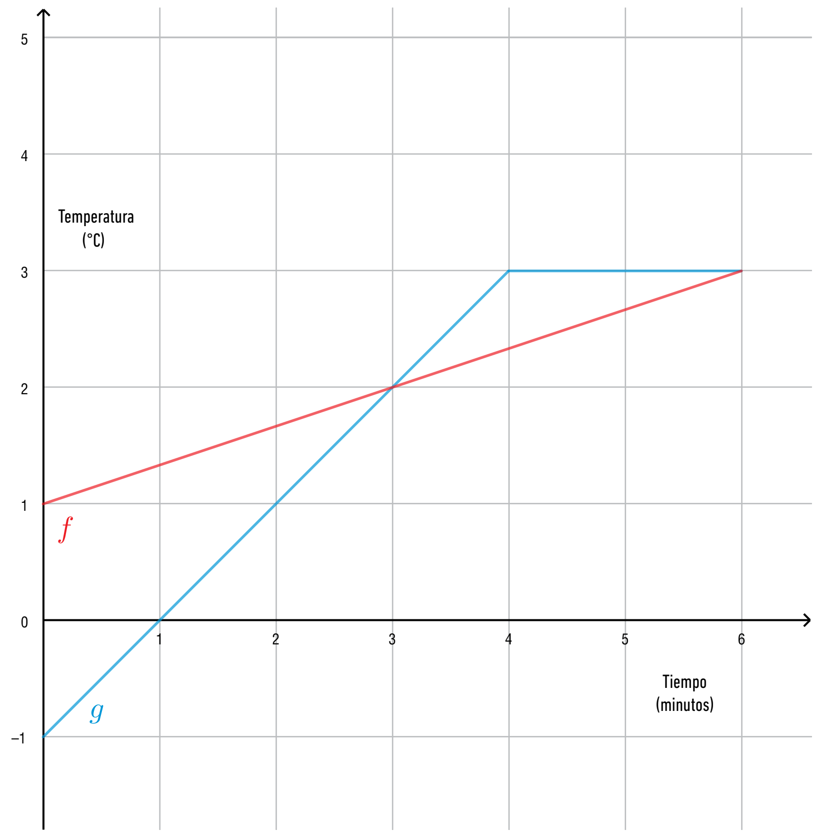
Por otro lado, se debe contemplar que, para resolver los problemas planteados, los estudiantes necesitarán incorporar el uso de algunas herramientas básicas del programa[8]. Esto implica no naturalizar su uso y dar espacio en la clase a los interrogantes o las dudas que puedan surgir sobre aspectos técnicos asociados a la utilización de GeoGebra. Así, estudiantes y docentes podrán realizar un aprendizaje colaborativo en torno a estas cuestiones.

También nos interesa profundizar en un planteo relacionado con las representaciones gráficas: el gráfico en papel es una representación diferente a la que se puede ver en la pantalla de GeoGebra; por lo tanto, posibilita otro tipo de tratamiento. Al ingresar una fórmula, el programa muestra un gráfico y pone a disposición del usuario diversas herramientas para interactuar con él. Por ejemplo, es posible hacer zoom, desplazar la vista gráfica, hallar puntos de intersección, etc. Esa interacción establece una vinculación específica, y las discusiones que se pueden generar a propósito de ella difieren de las que surgirían al disponer del gráfico en papel. Con lo cual, si lo imprimimos, no podremos realizar el mismo análisis ni llegar a las mismas conclusiones.

En perspectiva hacia el Ciclo Orientado, se espera que las estrategias puestas en juego en esta propuesta, al estudiar soluciones de una ecuación, se recuperen y entramen en próximos trabajos; por ejemplo, como mecanismo de control para técnicas algebraicas. En forma similar, se podrá avanzar en incorporar otros tipos de ecuaciones y ver de qué manera estas estrategias evolucionan o muestran sus límites.

8) Al final de este documento se encuentra el apartado "Algunas cuestiones técnicas sobre GeoGebra", que incluye explicaciones sobre el uso del programa, a modo de tutorial.

Problema 1. Se realizaron experimentos con dos sustancias distintas. A continuación se muestra un gráfico donde se representa la temperatura de cada una de las sustancias durante los experimentos, a partir del momento en que comienza la medición.



a) Marcá sobre el gráfico puntos que sirvan para determinar la temperatura inicial de ambas sustancias e indicá sus coordenadas. ¿Es cierto que inicialmente la temperatura de la sustancia f es menor que la de g?

b) Marcá todos los puntos sobre el gráfico que sirvan para indicar en qué momento la sustancia g tiene una temperatura de 1 °C e indicá sus coordenadas ¿En ese instante la otra sustancia tiene una temperatura mayor o menor?

c) Marcá sobre el gráfico todos los puntos en los que la temperatura de ambas sustancias sea la misma en el mismo momento e indicá sus coordenadas. ¿Es posible saber cuál es el valor de esa temperatura y en qué momento la alcanzaron?

En la figura incluida en este problema se representan, en un mismo sistema de ejes cartesianos, dos gráficos que describen la temperatura a través del tiempo de dos sustancias distintas. Se espera que los estudiantes puedan interpretarlos y compararlos con la intención de dar respuesta a las preguntas planteadas.

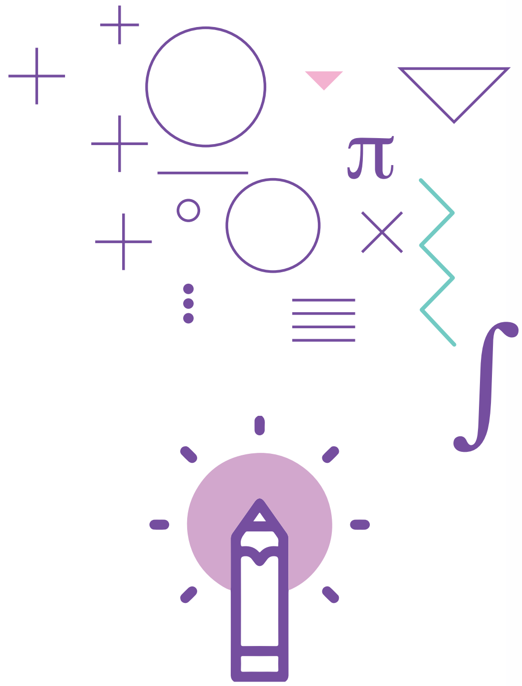
Para iniciar el trabajo, el docente puede proponer una lectura conjunta del enunciado, acompañada de preguntas que colaboren en la comprensión del problema. También puede formular otras que apunten a familiarizarse con la situación. Por ejemplo: "¿es cierto que los dos experimentos tuvieron la misma duración?, ¿cómo se dan cuenta?", "¿la temperatura de cada sustancia aumenta siempre?, ¿cómo se dan cuenta?".

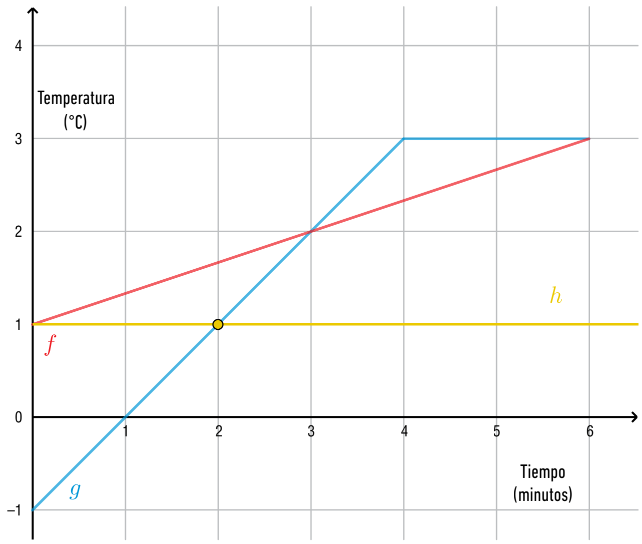
Al responderlas, se espera que los estudiantes realicen una lectura puntual desde el gráfico y que la pongan en relación con la notación de los puntos como par ordenado.

Para dar respuesta al **ítem a**, los estudiantes necesitan identificar $x = 0$ como el instante inicial del experimento. Al marcar en el gráfico los puntos correspondientes y determinar sus coordenadas, se puede recuperar la notación como par ordenado para cada uno de ellos: $(0;1)$ y $(0;-1)$. Esta será una oportunidad para realizar una interpretación del significado en términos del contexto del problema; por ejemplo, el punto $(0;1)$ indica que la sustancia f inicialmente tiene 1 °C de temperatura.

También se puede aprovechar para introducir o recuperar la notación $f(0)=1$ y $g(0)= -1$. Además, para notar que, en el instante inicial, la temperatura de la sustancia f es mayor que la temperatura de la sustancia g, es decir, $f(0)>g(0)$. Esta información puede extraerse tanto de la lectura del gráfico como de los valores numéricos provenientes de las coordenadas. El ida y vuelta entre gráfico, notación y contexto del problema será esencial para comprender en forma acabada la situación analizada.

En el **ítem b** el docente puede mostrar que, para hallar el instante en que g tiene 1°C, es posible intervenir el gráfico de la situación marcando una recta auxiliar horizontal $h(x)=1$, como se muestra a continuación.





Si bien este aspecto puede resultar innecesario para responder a la pregunta, ya que simplemente se podría identificar en el gráfico el punto $(2;1)$, el objetivo de esta intervención es comenzar a mirar el gráfico con el fin de reconocer los valores de la variable independiente para los cuales la dependiente toma un valor dado. Es decir, se trata de hallar todos los x para los cuales $h(x)=1$.

Además, se puede discutir que, si hubiese otro instante en el cual la temperatura de la sustancia g fuese de 1 °C, entonces se lo podría identificar como otro punto de intersección con la recta dibujada.

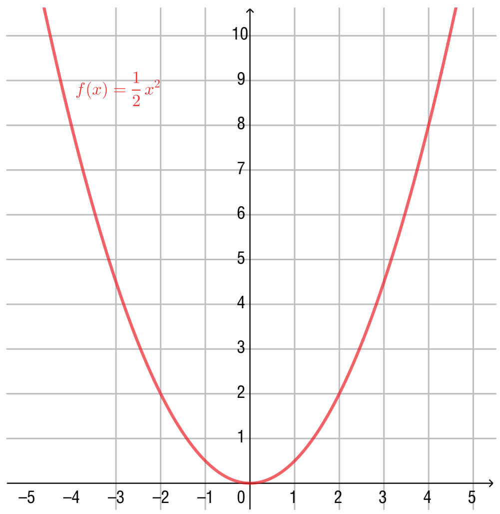
Con respecto a la pregunta formulada en este inciso, el objetivo no es que los estudiantes calculen de manera exacta la temperatura de la sustancia f, sino que observen el gráfico y adviertan que $(2;f(2))$ se encuentra por encima de $(2;1)$. De esta manera, la posición relativa de ambos puntos alcanza para afirmar que la temperatura de f es mayor que la de g y, por lo tanto, $f(2)>g(2)$.

En el **ítem c**, la intención es que puedan identificar los puntos de intersección entre ambos gráficos e interpretarlos para determinar los instantes en que ambas sustancias tienen la misma temperatura. Además de marcar en el gráfico los puntos $(3;2)$ y $(6;3)$, se puede abordar este asunto para volver sobre la notación $f(3)=g(3)=2$ y $f(6)=g(6)=3$, remarcando que, en ambas expresiones, puede leerse que las sustancias tienen la misma temperatura en el mismo instante.

A partir de lo tratado en este ítem, se puede reformular la pregunta planteándola en los siguientes términos: "¿Existe algún x (tiempo) para los cuales $f(x)= g(x)$ (misma temperatura)?". Así surge la notación $f(x)= g(x)$ asociada al trabajo con este inciso.

Como cierre del problema, el docente puede proponer la elaboración de una síntesis de lo trabajado, para que se llegue a concluir, por ejemplo, que: "Disponer de los dos gráficos en un mismo sistema de ejes cartesianos permitió comparar, para un determinado valor de la variable independiente, los valores de las variables dependientes. Es decir, dado un x puede ocurrir que $f(x)>g(x)$, $f(x)<g(x)$ o $f(x)=g(x)$; y esto se vincula con la posición de los puntos en el gráfico: el punto que esté 'más alto' tendrá el mayor valor en la segunda coordenada".

Problema 2. El siguiente gráfico representa la función $f(x)=\frac{1}{2}x^2$

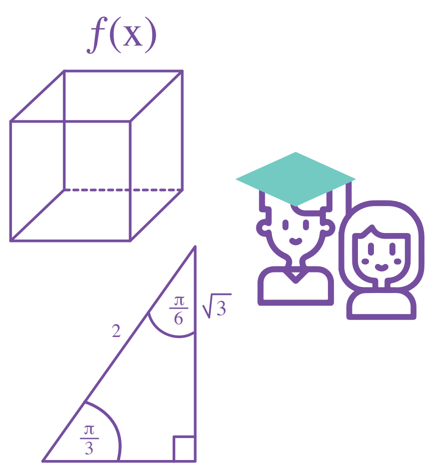


a) Marcá sobre el gráfico todos los puntos que sirven para hallar las soluciones de la ecuación $\frac{1}{2}x^2=8$ e indicá sus coordenadas.

b) Marcá sobre el gráfico todos los puntos que sirven para hallar las soluciones de la ecuación $f(x)=4{,}5$ e indicá sus coordenadas.

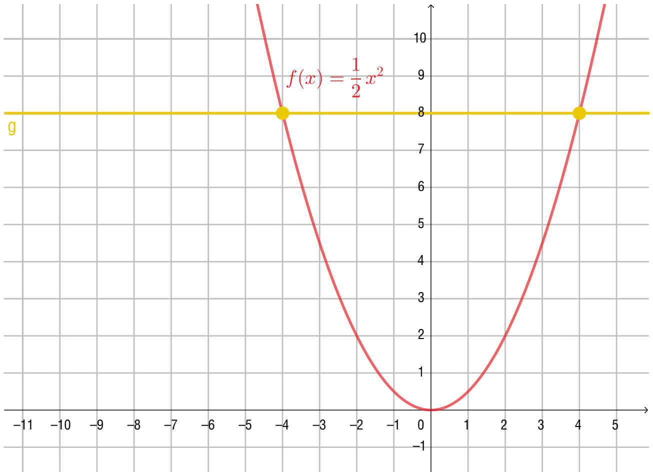
c) ¿Es cierto que el punto $(6;18)$ sirve para hallar una solución de la ecuación $f(x)=18$? ¿Y el punto $(-6;18)$? ¿Y $(-7;24)$?

d) ¿Es cierto que el valor $x=-2$ es solución de la ecuación $\frac{1}{2}x^2=2$. ¿Existe algún otro valor de x que sea solución?

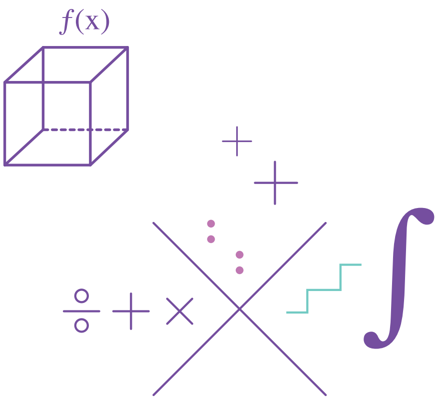


Este problema es el primero en el que aparece un tipo de función que será recurrente en el resto de la secuencia: la función cuadrática. Es importante destacar que no se pondrán en juego conocimientos particulares asociados a este tipo de función, sino que el foco de la propuesta está en la identificación de puntos en el gráfico, su lectura y su notación como par ordenado, cuestiones que también pueden extenderse a otro tipo de funciones. El docente podrá compartir con la clase que el gráfico presentado en este problema se llama "parábola" y que sus ramas continúan con esa forma y "hacia arriba", es decir, no "pega la vuelta" y sigue con el mismo comportamiento para valores de x mayores de 5 y menores de –5. En caso de contar con proyector, computadoras o celulares, el docente puede proponer que ingresen la fórmula en GeoGebra y mostrar que, al realizar un zoom, se visualiza "más gráfico"; y, además, que conserva la forma parabólica característica.

Para resolver el **ítem a**, los estudiantes necesitarán reconocer puntos en el gráfico tales que su segunda coordenada sea 8. Al igual que en el problema anterior, se puede intervenir el gráfico del enunciado trazando una recta horizontal (auxiliar) $g(x)=8$, con la intención de marcar los puntos de intersección entre ambos. Las coordenadas de estos puntos caen sobre un nodo de la cuadrícula, por lo que su lectura no presenta dificultades.

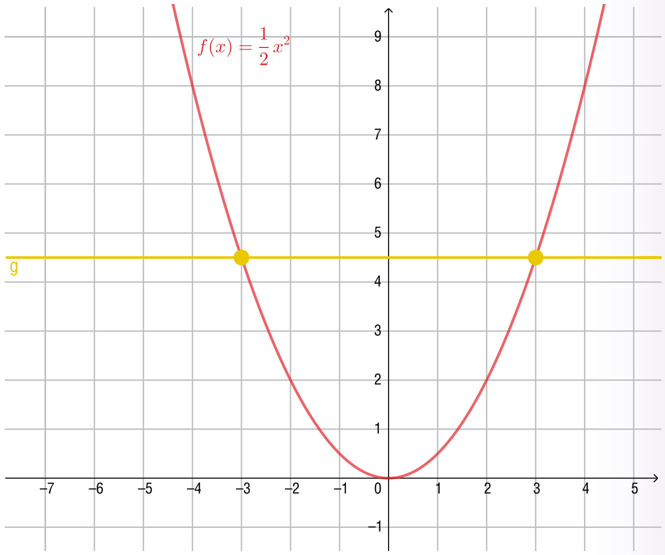


Por otro lado, el docente podrá recuperar la relación entre la notación de par ordenado y la escritura funcional. Por ejemplo, uno de los puntos que cumple la relación es $(-4,8)$ y esto se vincula con $f(-4)=8$. Incluso, dependiendo de la experiencia que tenga el grupo con el uso de las fórmulas, podría surgir la idea de evaluar en la expresión los valores obtenidos a partir del análisis del gráfico, es decir, $f(-4)=\frac{1}{2}\cdot(-4)^2=\frac{1}{2}\cdot 16=8$ y $f(4)=\frac{1}{2}\cdot 4^2=\frac{1}{2}\cdot 16=8$



Además, el docente podría proponer que los estudiantes ingresen la fórmula en GeoGebra y trabajen con esta herramienta. Para ello será importante que los acompañe en el uso del programa, si no tienen manejo de las cuestiones que se requieren.

Para el **ítem b** podrán poner en juego los conocimientos y las estrategias desplegadas en la resolución del ítem a. Sin embargo, hay algunas diferencias en relación con la enunciación de la pregunta, ya que en este ítem se utiliza $f(x)=4,5$ en lugar de $\frac{1}{2}\cdot x^2=4,5$, por lo que el docente quizá deba realizar algún tipo de intervención al respecto. Por otro lado, una cuestión interesante es que los puntos de intersección entre la parábola y la recta auxiliar $g(x)=4,5$ no caen exactamente sobre los nodos de la cuadrícula, como se ve en la imagen siguiente:



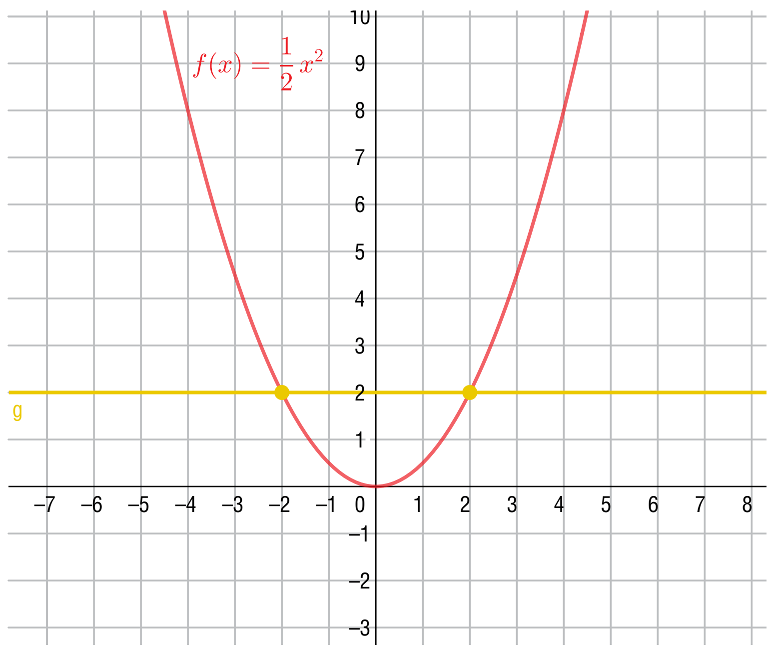
Al respecto, se podría poner en duda cuáles son las coordenadas exactas de dichos puntos, otorgándole sentido al uso de la fórmula para validar. Es decir, según lo que puede verse en el gráfico, solo es posible conjeturar (pero no afirmar) que los puntos cuyas primeras coordenadas son $x=3$ y $x=-3$ tienen segunda coordenada 4,5. Con el propósito de validar esta hipótesis, el docente puede proponer evaluar en la fórmula: $f(3)=\frac{1}{2}\cdot 3^2=\frac{1}{2}\cdot 9=\frac{9}{2}=4,5$ y $f(-3)=\frac{1}{2}\cdot(-3)^2=\frac{1}{2}\cdot 9=\frac{9}{2}=4,5$

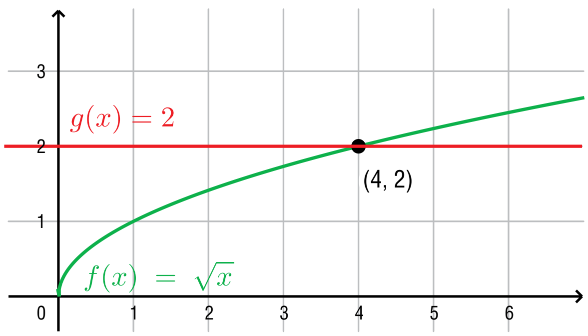
El **ítem c** involucra decidir si tres pares ordenados sirven para obtener soluciones de la ecuación $f(x)=18$. Dado que todos los puntos quedan por fuera del recuadro, el recurso de apelar al gráfico resulta insuficiente para responder a la pregunta. Nuevamente, esta limitación le otorga sentido al uso de la fórmula para decidir si un valor determinado es solución de la ecuación. En el caso de que estén utilizando GeoGebra, se podrá poner en juego el uso del Zoom o la herramienta Desplaza Vista Gráfica. Sin embargo, el docente puede compartir con los estudiantes otra estrategia o preguntar: “Si no disponemos de GeoGebra, ¿cómo se podría resolver el ítem c?”.

El **ítem d** podría entenderse en forma análoga al ítem anterior (de hecho, puede resolverse apelando a las mismas estrategias); sin embargo, no necesariamente esto será obvio para los estudiantes. En este caso, es recomendable que, en lugar de explicitarlo directamente, el docente genere preguntas que promuevan la puesta en relación de la notación de par ordenado *(-2;2)* con el significado en términos de valores de x que son solución de la ecuación. Nuevamente se podría recurrir a trazar una recta auxiliar $g(x)= 2$ y analizar los puntos donde ambas gráficas “se cortan”.

Es importante remarcar que la técnica que se busca construir con los estudiantes, a partir del trabajo con esta secuencia, pone en juego tanto el registro gráfico como el algebraico, destacando los puntos de intersección entre los gráficos como referencia para pensar en las soluciones de una ecuación.

Para fijar algunas ideas y formas de representar, que se retomarán en próximos problemas, el docente puede proponer la realización de una tabla como la que se muestra a continuación, en un espacio colectivo, pensada para la función $f(x)=\sqrt{x}$. Se trata de determinar todos los valores de x para los cuales se cumple la relación $f(x)=2$.

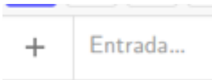


Relación	Recta Auxiliar	Gráfico y coordenadas del punto de intersección	Validación usando la fórmula	Solución de la ecuación
$f(x)=2$ o $\sqrt{x}=2$	$g(x)=2$		$f(4)=\sqrt{4}=2$	$x=4$

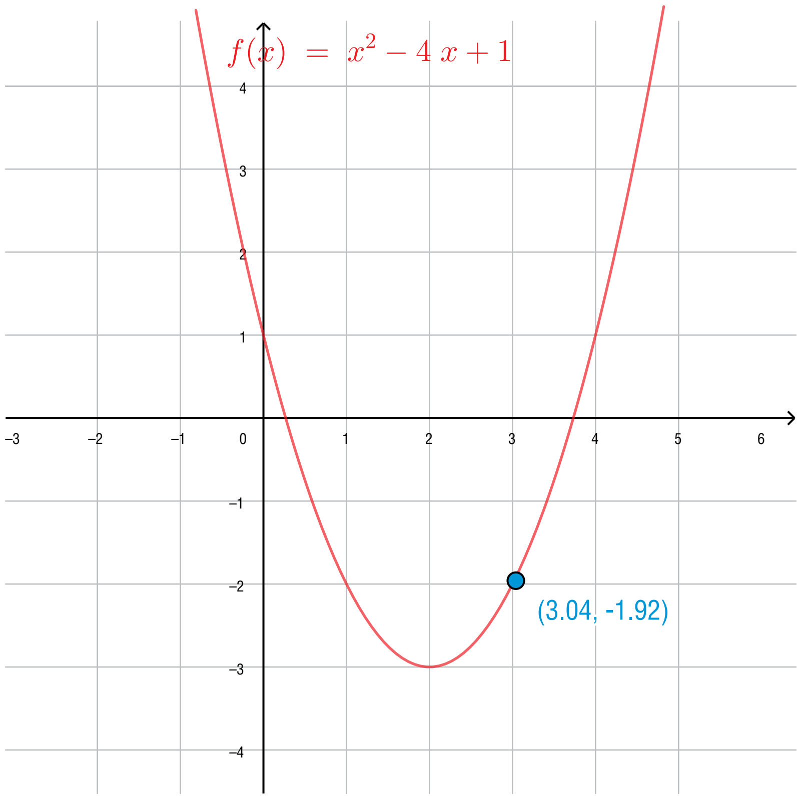
Problema 3. Para determinar valores de x que sirven para hallar la solución $x^2 - 4x + 1 = -2$, Marcelo y Andrea utilizaron dos estrategias diferentes, y ambos usaron GeoGebra.

Analicen cada una de las estrategias y respondan las preguntas.

Estrategia de Marcelo

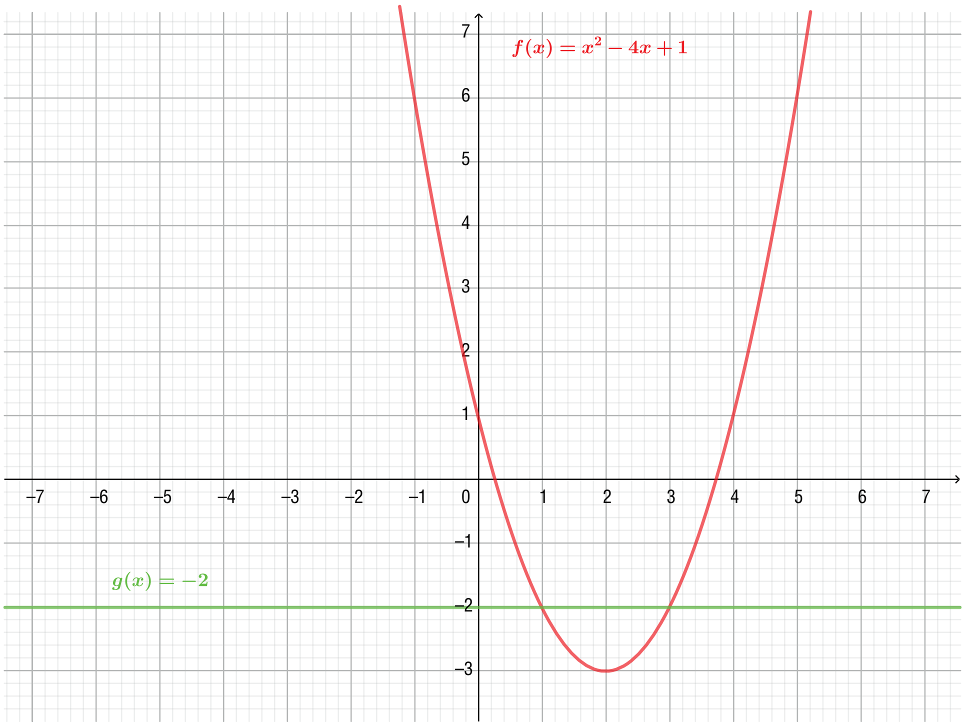
- Ingresé en la barra de entrada de GeoGebra 

la función $f(x) = x^2 - 4x + 1$
- Con la herramienta Punto  agregué un punto A sobre la gráfica.
- Con la herramienta Mueve  fui desplazando el punto A pero no conseguí ubicarlo para que la segunda coordenada quede exactamente en −2, así que lo ubiqué en un valor cercano, que es −1,92. En ese punto, la primera coordenada toma un valor cercano a 3, que es 3,04.
- Luego hice $f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = 9 - 12 + 1 = -2$. Entonces, si x toma el valor 3 se cumple la relación $x^2 - 4x + 1 = -2$.



Estrategia de Andrea

- Ingresé en la barra de entrada de GeoGebra la función $f(x)=x^2-4x+1$ y apareció un gráfico en la pantalla.
- Luego, para trazar una recta horizontal, ingresé en la barra de entrada $g(x)=-2$.



- Finalmente usé la herramienta Intersección  , para hallar los puntos en donde "se cortan" ambas gráficas. Me di cuenta de que, si la variable x toma el valor 1 o 3, se cumple la relación $x^2-4x+1=-2$.

a) Utilizá GeoGebra para poner en juego la estrategia de Marcelo.

b) Usando esta estrategia, ¿es posible obtener otro valor de x que sea solución de $x^2-4x+1=-2$?

c) Utilizá GeoGebra para seguir los pasos de la estrategia de Andrea. ¿Es cierto que sirve para encontrar dos valores de x que cumplen la relación $x^2-4x+1=-2$?

d) Encontrá todos los valores de x que son solución de $x^2-4x+1=6$ utilizando GeoGebra.

Este problema tiene dos objetivos centrales: por un lado, se espera que los estudiantes realicen un primer acercamiento al trabajo con GeoGebra, a partir de seguir los pasos de las estrategias mencionadas en el enunciado; y, por otro, que se apropien de ellas con el fin de estudiar el conjunto solución de una ecuación.

En los siguientes enlaces pueden verse videos que reproducen estos pasos:

Estrategia de Marcelo

Estrategia de Andrea

En forma transversal a este trabajo aparece la idea de validación mediante la utilización de la fórmula. Resulta necesario, como recurso para la enseñanza, que los estudiantes puedan incorporar la validación como parte de la práctica matemática. Inclusive este aspecto posibilita la coordinación entre diferentes registros de representación (el gráfico y la fórmula), asunto que, como es sabido, contribuye a la construcción de ideas.

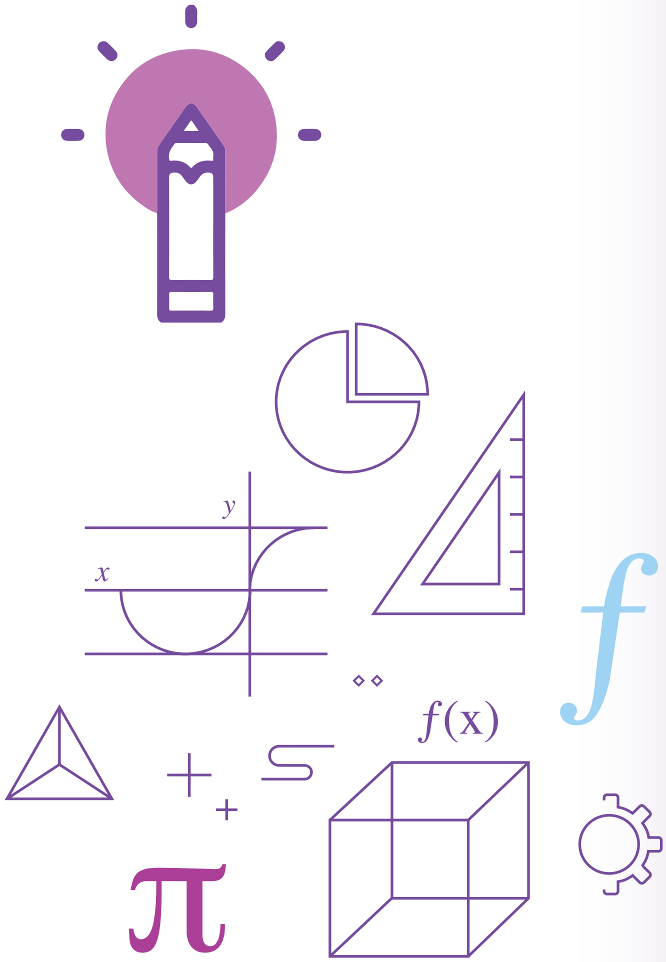
Una primera observación respecto al trabajo con este problema se asocia al manejo del programa. Ya que cada estudiante necesita seguir instrucciones, es posible que cometa algunos errores. Conviene, entonces, anticipar y mostrar algunas posibles intervenciones.

Por ejemplo:

- Que aparezcan errores de tipeo al ingresar la fórmula en la barra de entrada. El docente puede proponer que luego, en la vista algebraica, chequeen si la fórmula coincide con la dada por el problema.
- Que, al seguir los pasos de la estrategia de Marcelo, el punto ingresado no quede asociado a la parábola. Se puede sugerir que lo muevan para corroborar que se desplaza sobre la curva.

Una segunda observación tiene que ver con aprovechar la oportunidad del uso del programa, a fin de dar sustento a algunas ideas que circularon a propósito de problemas anteriores y que se retoman en este. Por ejemplo, el hecho de que el gráfico tiene forma de parábola y que continúa con el mismo comportamiento más allá de los límites de la pantalla. En este caso, se le puede sugerir a los estudiantes que hagan un zoom de alejamiento para visualizarlo.

Por otro lado, es fundamental rescatar el último paso de la estrategia de Marcelo y su relación con el paso anterior. Por ejemplo, el docente puede preguntar: "¿Por qué Marcelo hizo $f(3)$?", "¿por qué el resultado de ese cálculo es -2?", "¿qué relación hay entre esos cálculos y lo que Marcelo veía en la pantalla?". Estas indagaciones pueden dar lugar a un debate acerca de las limitaciones de los diferentes registros, los supuestos que se utilizan en esta estrategia y la necesidad de realizar validaciones usando la fórmula proporcionada.



Problema 4. Utilizando GeoGebra, graficá $f(x)=x^2+3x-8$. Luego, basándote en las estrategias trabajadas en el problema anterior, resolvé cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $f(x)=2$

b) $f(x)=-8$

c) $f(x)=-11$

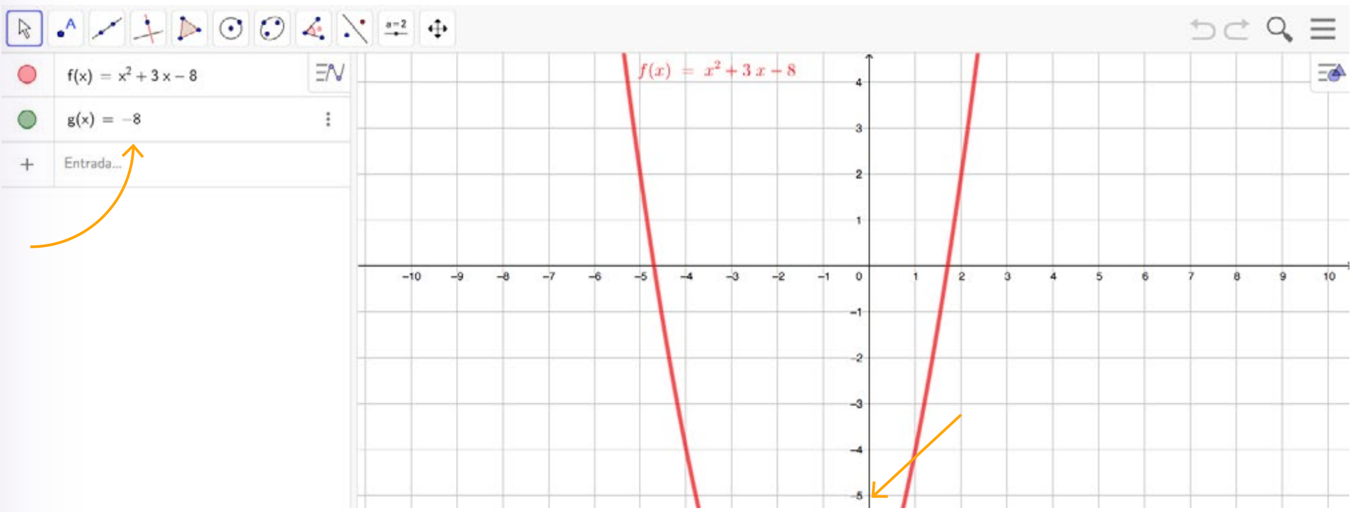
d) $f(x)=20$

El trabajo con este problema puede iniciarse con una lectura e interpretación conjunta del enunciado, ya que es el primero de la secuencia en donde se menciona explícitamente la resolución de ecuaciones. **Si bien es habitual que los estudiantes vinculen esta tarea con la aplicación de técnicas algebraicas, en esta propuesta se busca ampliar la mirada hacia otras técnicas posibles para trabajar con ellas; en particular, utilizando las estrategias abordadas en los problemas anteriores, que involucran el uso de GeoGebra.** Por lo tanto, es esencial que se pueda vincular la resolución de ecuaciones con lo realizado en la secuencia anteriormente.

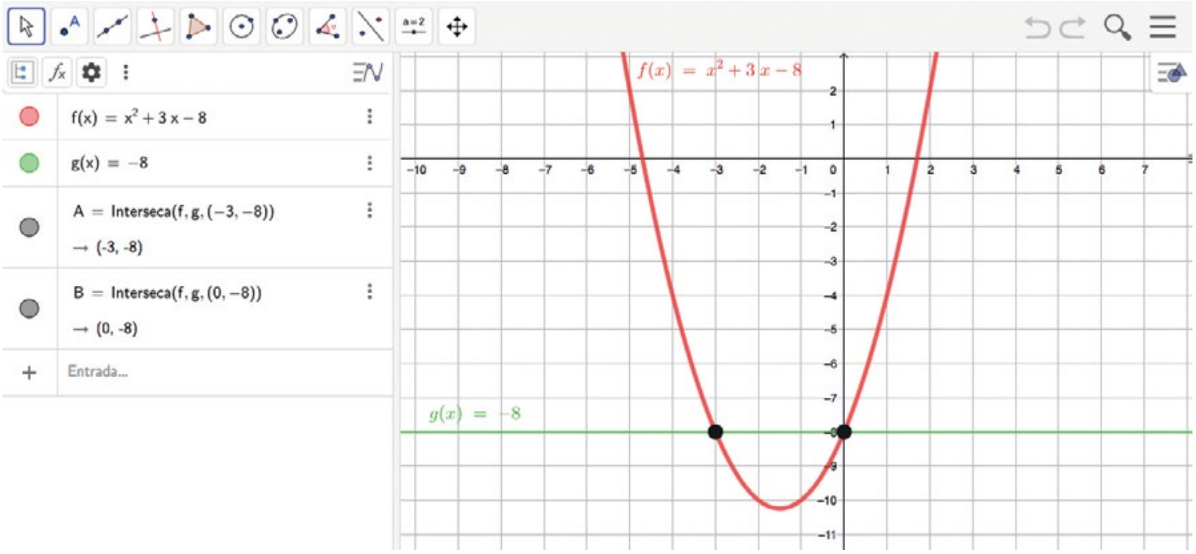
En este sentido, la idea que aparece se comienza a construir a partir de la interpretación del gráfico para conjeturar valores que podrían ser solución de una ecuación. Es decir, diremos que si al reemplazar un valor de la variable x se cumple la igualdad numérica, entonces será solución de la ecuación. Por ejemplo, para el **ítem a** se espera que, luego de ingresar en GeoGebra la fórmula $f(x)=x^2+3x-8$ y la recta auxiliar $g(x)=2$, los estudiantes conjeturen que $x=-5$ es un posible valor que podría ser solución de $f(x)=2$; y como $f(-5)=(-5)^2+3\cdot(-5)-8=25-15-8=2$, entonces $x=-5$ es una solución de $x^2+3x-8=2$. Realizando este mismo análisis, pueden establecer que $x=2$ es también solución de la ecuación. De este modo, el conjunto solución de $f(x)=2$ es $\{2,-5\}$.

Entonces, el uso de la herramienta Intersección cobra importancia para estudiar el conjunto solución de las ecuaciones planteadas ya que, al utilizarla, se obtienen <u>todos</u> los puntos de intersección entre las gráficas.

En el caso del **ítem b**, si se ingresa en GeoGebra la recta auxiliar $g(x)=-8$, es probable que no se visualice en la vista gráfica (aunque sí en la algebraica). Esto está relacionado con los límites del recuadro, que llega hasta el valor -5 del eje vertical, como se muestra en la siguiente imagen.



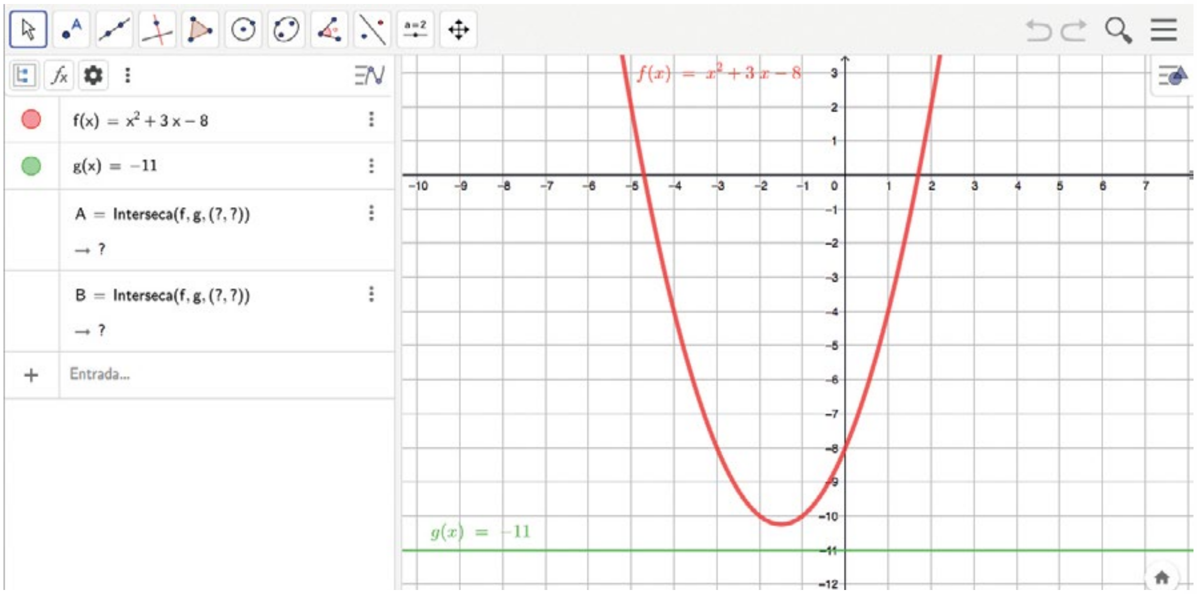
De este modo, será necesario el uso de la herramienta Desplaza Vista Gráfica o Zoom para poder visualizar ambas gráficas: la que corresponde a la recta auxiliar y la de la parábola. Asimismo, con la ayuda de la herramienta Intersección se podrán marcar los puntos que sirven para pensar en las soluciones de la ecuación.



Considerando la imagen anterior, a partir de determinar las coordenadas de los puntos A y B, se puede establecer que las posibles soluciones con $x=0$ y $x=-3$. Esta cuestión se puede validar haciendo $f(0)=0^2+3 \cdot 0 -8= -8$ y $f(-2)=(-3)^2+3 \cdot (-3) - 8= 9-9-8=-8$. Así, el conjunto solución es $\{0,-3\}$.

El procedimiento mencionado anteriormente implica un interjuego entre la vista algebraica y la vista gráfica. Será el docente quien tenga que poner este aspecto en discusión, así como la sugerencia de utilizar las herramientas Desplaza Vista Gráfica y Zoom para poder coordinar los elementos de ambas vistas.

En el **ítem c** se presenta la primera ecuación que tiene conjunto solución vacío, es decir, que no existe un valor que cumpla la relación. En este caso, al seguir el procedimiento anterior y utilizar la herramienta Intersección, el programa devuelve (?,?) en lugar de un punto. Esta es la forma que tiene GeoGebra de comunicar que no existen puntos de intersección. Sin embargo, el docente podrá intervenir para dotar de sentido a esta situación, por ejemplo, destacando que todo el gráfico de la función f se encuentra por encima de la recta $g(x)=-11$ y que, por esta razón, no hay puntos de intersección entre ambas gráficas. Nuevamente, será importante vincular ambas vistas y argumentar a propósito de lo que se ve.



Problema 5. Utilizando GeoGebra, graficá $f(x)= -2x \cdot (x+2)$ y resolvé las siguientes ecuaciones:

a) $-2x \cdot (x+2) = 0$

b) $-2x \cdot (x+2) = 2$

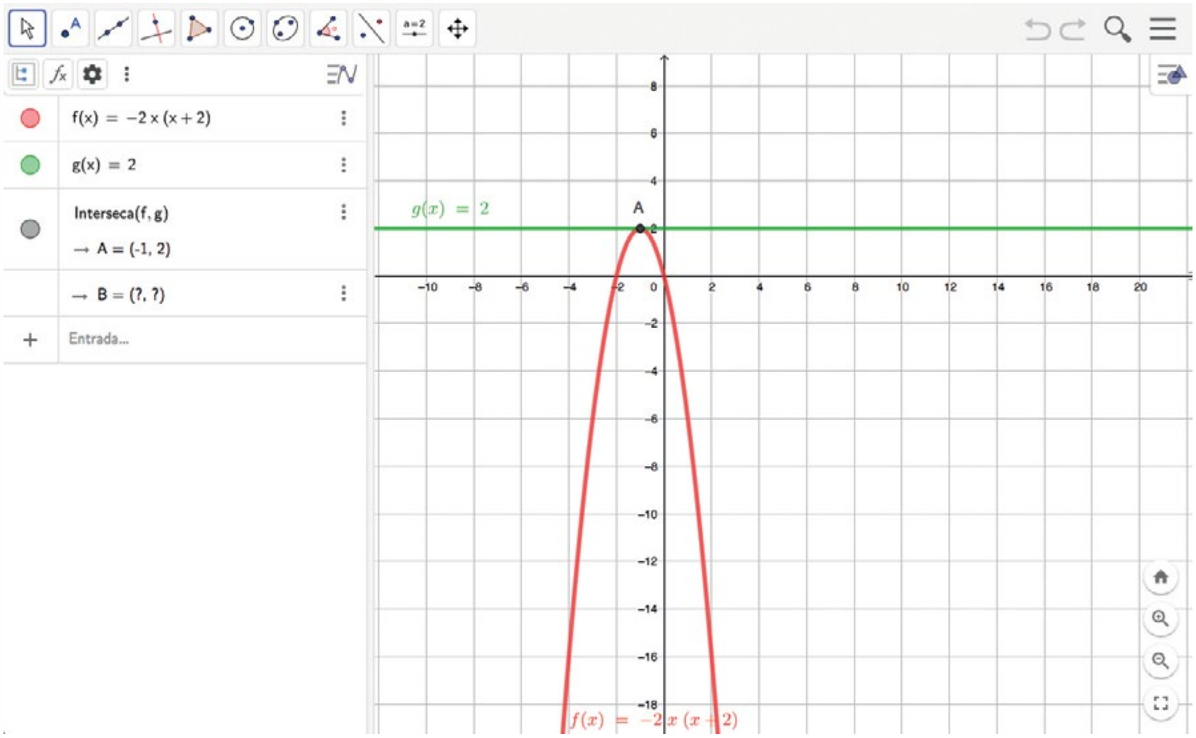
c) $-2x \cdot (x+2) = -\frac{21}{2}$

d) $-2x \cdot (x+2) = 4$

Este problema es similar al anterior, aunque plantea cuestiones que permiten sistematizar la técnica trabajada para buscar soluciones de una ecuación. Nos parece importante volver a destacar que, si bien existen otras técnicas algebraicas para hallar el conjunto solución de este tipo de ecuaciones (el uso de la fórmula resolvente, por ejemplo), en este caso no se espera que se discutan o se pongan en juego.

Respecto del **ítem a**, luego de trabajar con GeoGebra y de identificar que $x=0$ y $x=-2$ cumplen $f(0)= -2 \cdot 0 \cdot (0+2)=0 \cdot 2=0$ y $f(-2)= -2 \cdot (-2) \cdot (-2+2)=4 \cdot 0=0$, el docente puede aprovechar para observar lo siguiente: cada uno de los valores mencionados, al evaluarlos en la ecuación, anulan un factor de la multiplicación involucrada en la fórmula. Es decir, si $x=0$, se anula el factor $-2 \cdot x$, y si $x=-2$ vale cero, el factor $(x+2)$.

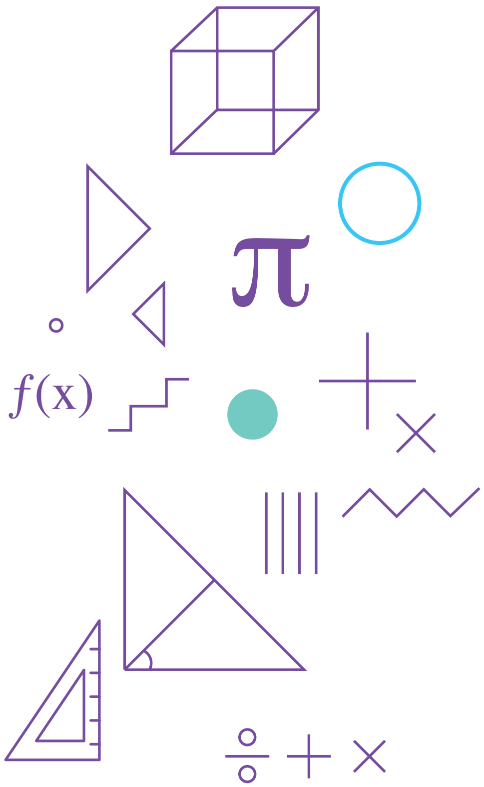
Para el **ítem b** puede conjeturarse, a partir del gráfico, que la ecuación tiene una única solución.

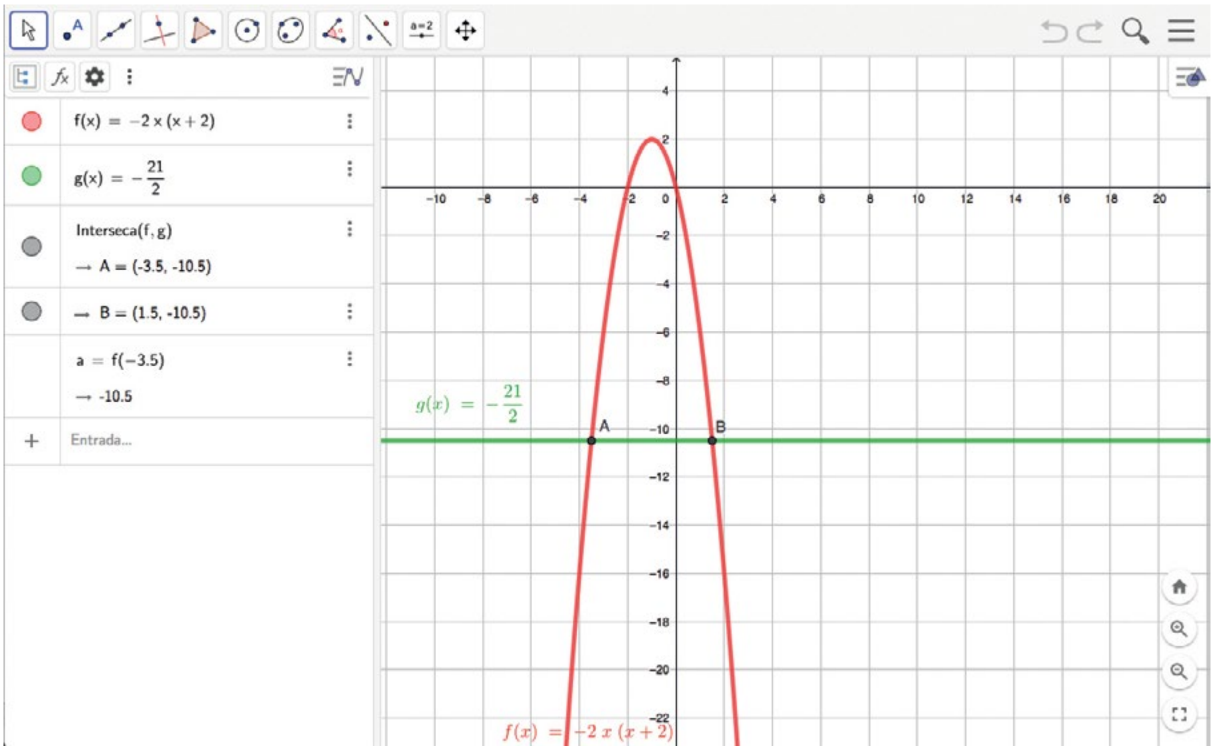


Esto también puede verificarse analíticamente, pues el valor $x= -1$ cumple $f(-1)= -2 \cdot (-1) \cdot (-1+2)=2 \cdot 1=2$.

En el **ítem c**, si bien los puntos no “caen” sobre un nodo de la cuadrícula, el programa brindará las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas como número decimal. De esta manera, se deberán poner en juego las distintas representaciones de los números racionales, como decimal o fracción, para validar que efectivamente los valores $x= -3.5$ y $x=1.5$ sean soluciones. Por ejemplo, si $x=-3.5$, se tiene que $f(-3.5)= -2 \cdot (-3.5) \cdot (-3.5+2)=7 \cdot (-1.5)= -10.5= -\frac{21}{2}$, por lo cual se cumple la relación. El cálculo para el otro valor se puede realizar del mismo modo (al final de esta página se muestra una imagen de lo que aparecerá en la pantalla).

En el **ítem d** se vuelve a proponer una ecuación en donde no hay valores que cumplan la relación, es decir, el conjunto solución es vacío. En este caso, el docente puede observar que la recta auxiliar queda totalmente por encima del gráfico y que, por esa razón, no hay punto de intersección entre las gráficas.





Problema 6. Encontrá alguna/s soluciones para las siguientes ecuaciones:

a) $2x^3 - 15x^2 + 36x - 25 = 7$

b) $2x^3 - 15x^2 + 36x - 25 = 2$

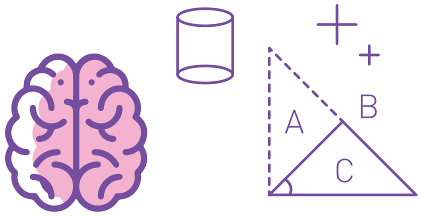
c) $1 + x^2 = -3$

d) $\frac{1}{x} = 2$

e) $x \cdot (x-3) \cdot (x+2) = 0$

Este problema está pensado para seguir avanzando en la aplicación de la técnica de resolución de ecuaciones analizada en los problemas anteriores. Si bien las funciones involucradas no son todas cuadráticas, el trabajo es análogo.

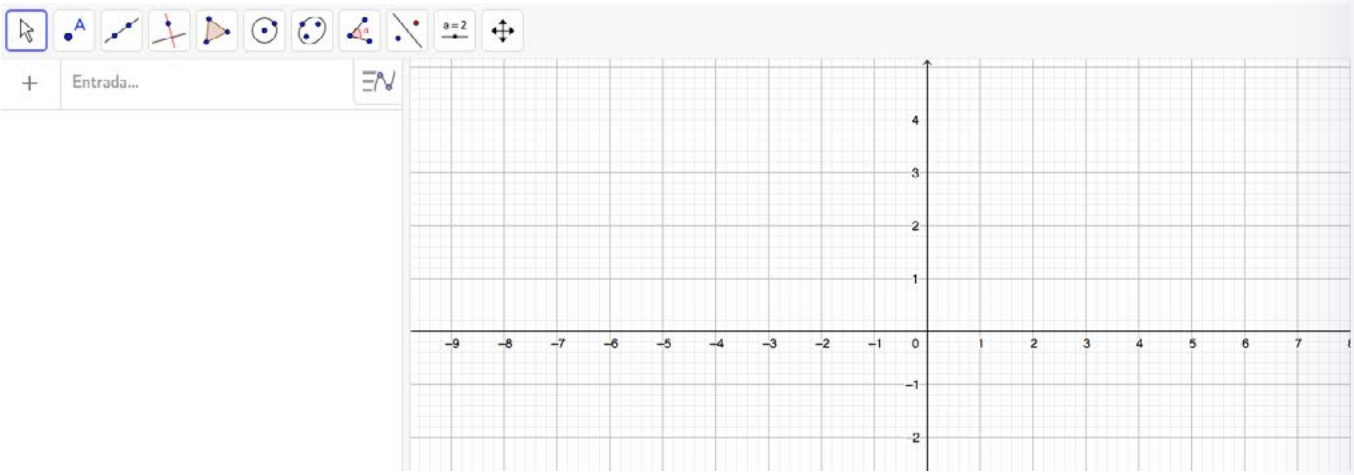
Es importante remarcar que, en este caso, no se solicita a los estudiantes que hallen todas las soluciones de las ecuaciones, sino algunas. Nuevamente se sugiere darle relevancia a la utilización de la fórmula para validar que los valores hallados son efectivamente soluciones.



ALGUNAS CUESTIONES TÉCNICAS SOBRE GEOGEBRA

Para el trabajo con esta secuencia se puede usar la versión[9] GeoGebra Clásica 6, en la apariencia Graficación. Lo que caracteriza esta apariencia es que se visualizan en la pantalla dos vistas, la vista algebraica con su correspondiente barra de entrada (izquierda) y la vista gráfica con los ejes cartesianos (derecha).

A continuación describimos algunas de las herramientas que será necesario conocer para acompañar al grupo de estudiantes en el desarrollo de la secuencia.

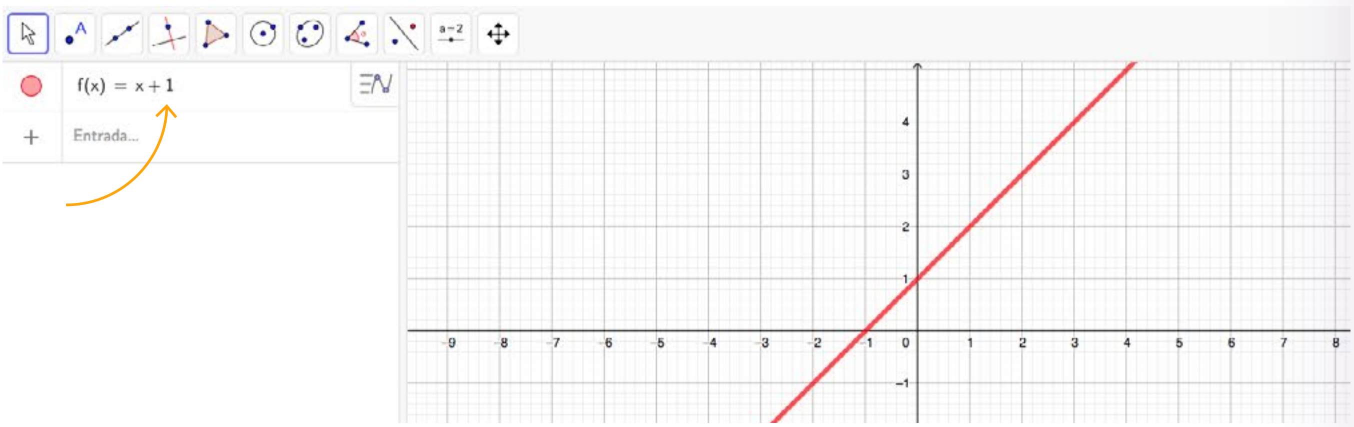


INGRESAR UNA FÓRMULA EN LA BARRA DE ENTRADA

Al abrir GeoGebra para graficar $f(x)=x+1$, simplemente anotando $f(x)=x+1$ en la barra de entrada y pulsando enter, aparecerá un gráfico de la función ingresada.

La particularidad que tiene este programa es que ambas vistas están vinculadas, es decir, al ingresar una fórmula en la vista algebraica automáticamente se produce una representación gráfica del objeto en cuestión en la correspondiente vista, y viceversa.

Sin embargo, puede ocurrir que un elemento aparezca en la vista algebraica y no se visualice en la vista gráfica. Por ejemplo, eso sucedería si ingresáramos el punto $(1,8)$ en la barra de entrada de la imagen anterior. Para poder visualizar este objeto será necesario utilizar alguna de las siguientes herramientas.



9) Esta versión puede descargarse desde la página web oficial de GeoGebra, incluida en este enlace https://www.geogebra.org/download, lo que posibilitará usar el programa sin necesidad de estar conectado a internet. También hay una versión en línea disponible en https://www.geogebra.org/classic. En el caso de que se quiera utilizar un celular, se puede acceder a la versión "Calculadora Gráfica" desde la web https://www.geogebra.org/calculator o descargar la aplicación.

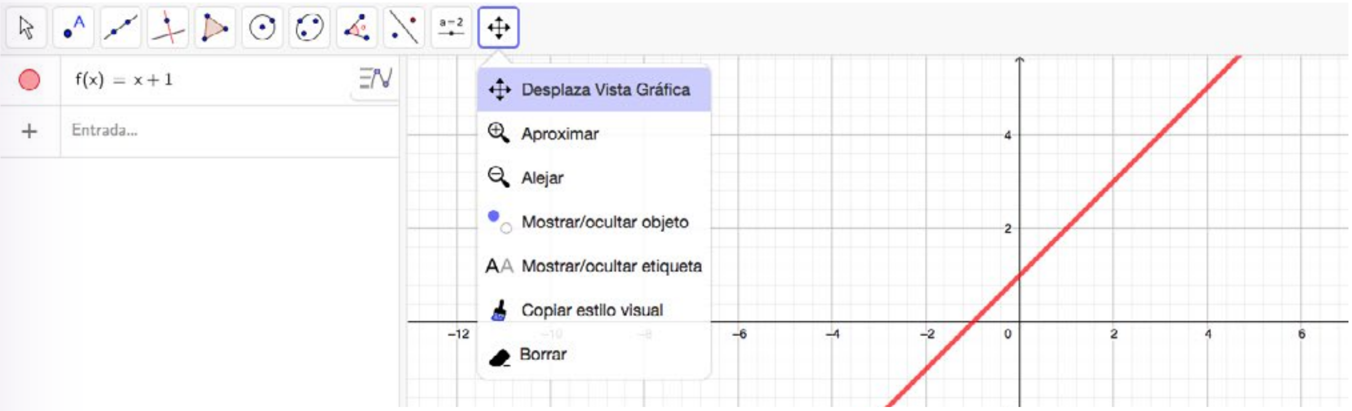
HERRAMIENTAS DESPLAZA VISTA GRÁFICA Y ZOOM

El programa dispone de una herramienta que permite que el usuario pueda arrastrar y soltar la vista gráfica para cambiar la zona visible. Esta acción se puede realizar de varias maneras: utilizando la herramienta o, en la versión para celular, alcanza con tocar y desplazar en la pantalla.

Las herramientas Aproximar y Alejar, que se encuentran en los diferentes botones en la misma caja de herramientas, corresponden al Zoom. Otra forma de acceder a él es por medio de la rueda del mouse. A continuación se muestra una imagen donde se observan las herramientas mencionadas.

Por otro lado, el programa tiene predeterminada la misma escala en ambos ejes. Sin embargo, se la puede modificar haciendo clic derecho sobre la pantalla y seleccionando la opción “Eje x : Eje y”; de esta forma se despliegan distintas escalas.

Otra alternativa es cambiarla manualmente seleccionando la herramienta Desplaza Vista Gráfica. Al posarse sobre el eje cuya escala se desea modificar, se mantiene el clic izquierdo expandiéndola o contrayéndola.

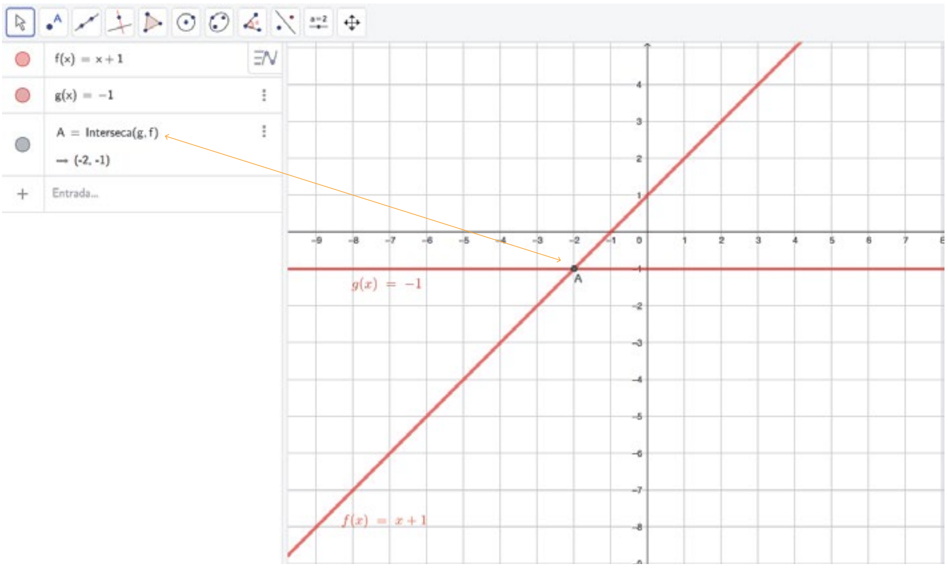


HERRAMIENTAS PUNTO E INTERSECCIÓN

Si bien es posible ingresar un punto en la vista algebraica por medio de sus coordenadas, también se puede hacer clic en la pantalla y crearlo directamente a partir de la herramienta Punto , haciendo clic en la vista gráfica (al finalizar, aparecen sus coordenadas en la vista algebraica).

Para poner un punto sobre otro objeto, simplemente hay que seleccionar la herramienta Punto y luego hacer clic sobre el gráfico de la función o curva. Así se puede crear un punto nuevo en ese objeto. Esto posibilita que, al usar la herramienta Mueve, el punto siempre se desplace sobre ese objeto, como ocurre en el problema 3 de la secuencia presentada.

Para obtener la intersección entre dos objetos es posible utilizar la herramienta Intersección : haciendo clic sobre los gráficos se obtienen puntos de color negro sobre ellos. Además, aparecen las coordenadas en la vista algebraica, como se observa en la siguiente imagen.



Anexo

Enunciados de las actividades

PROPUESTA 1

La enseñanza de las funciones mediante situaciones de modelización. El modelo de calentamiento del agua

Problema 1

Ejemplo de problema que favorece la producción de un modelo

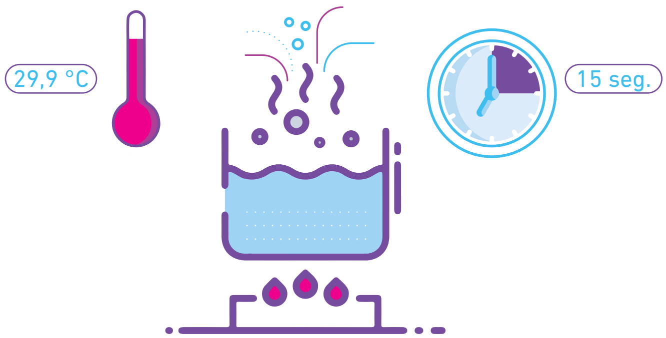
Problema 1 (primera parte)

Lean la experiencia que se describe a continuación y luego respondan las preguntas.

Experiencia

En una cocina se encontraba una olla con agua adentro. En un momento determinado, se encendió la hornalla y un cronómetro al mismo tiempo, y comenzaron a tomarse datos con la intención de registrar valores de temperatura correspondientes a instantes determinados.

Se sabe que nunca se modificó la intensidad de la llama y que la olla se mantuvo sobre la misma hornalla hasta que el agua alcanzó su punto de ebullición a los 94,9 °C. El termómetro siguió marcando dicha temperatura hasta que se apagó.



Los datos recopilados se registraron en una tabla, que puede verse a continuación:

TIEMPO (SEGUNDOS)	TEMPERATURA (°C)
10	27,9
15	29,9
26	35,2
61	50,6
96	65,5
122	75,3
145	81,5
162	88
203	94,9
230	94,9
260	94,9

Respondan en parejas las siguientes preguntas:

a) ¿Qué temperatura habrá indicado el termómetro transcurridos 20 segundos de haber iniciado la experiencia? ¿Y a los 25 segundos?

b) ¿Qué tiempo habrá indicado el cronómetro cuando la temperatura del agua alcanzó 90 °C?

c) ¿Qué temperatura habrá indicado el termómetro a los 240 segundos?

Problema 1 (segunda parte)

¿Cuál de estos gráficos elegirían para representar la situación estudiada en la primera parte? ¿Por qué?

Observación: los puntos representados en el Gráfico 1 y el Gráfico 2 corresponden a las filas de la tabla presentada en la primera parte de este problema.

Gráfico 1

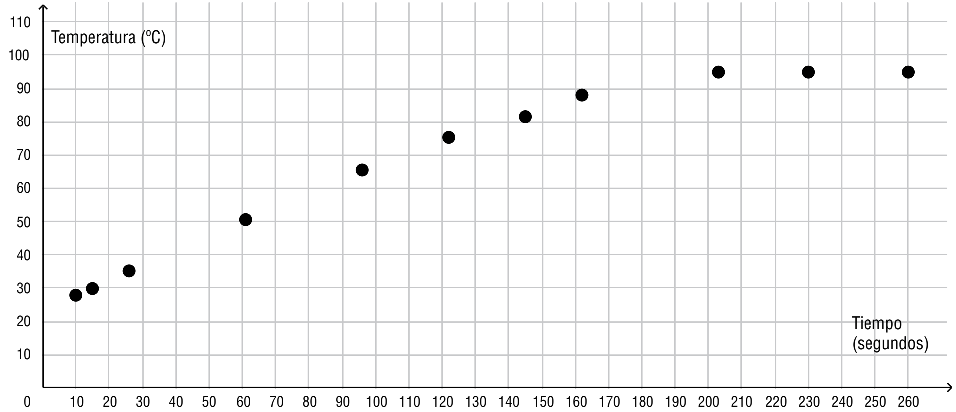


Gráfico 2

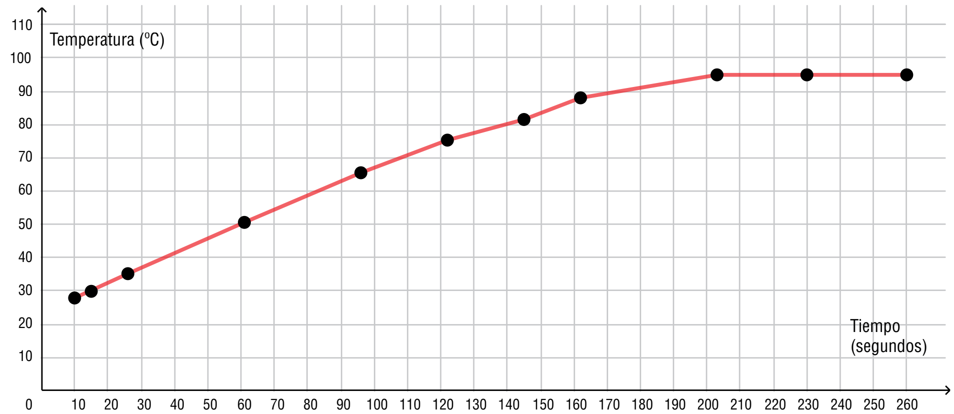
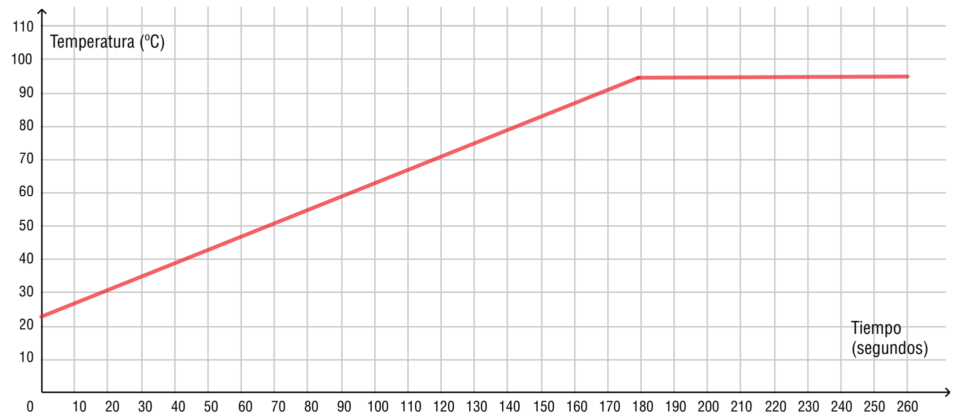


Gráfico 3



Problema 2

Ejemplo de un problema que implica la interpretación de un modelo

Un recipiente con agua a 55 °C fue colocado sobre una hornalla encendida. Sabiendo que alcanzó el punto de ebullición a los 14 minutos, en pequeños grupos, decidan cuál o cuáles de los siguientes gráficos pueden corresponder a la situación planteada. Expliquen cómo se dieron cuenta.

Gráfico 1

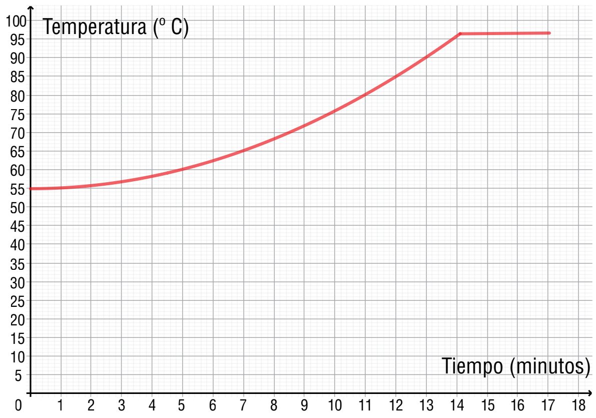


Gráfico 2

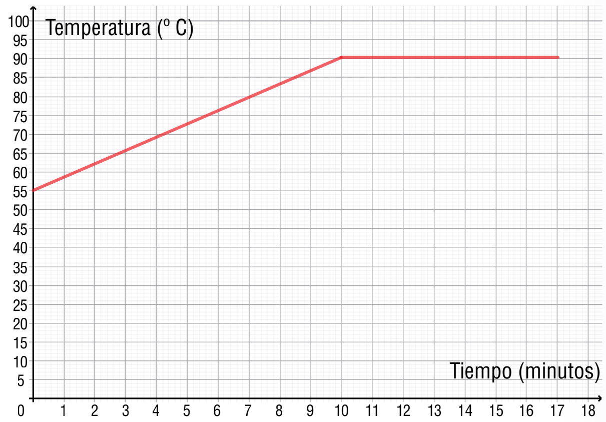


Gráfico 3

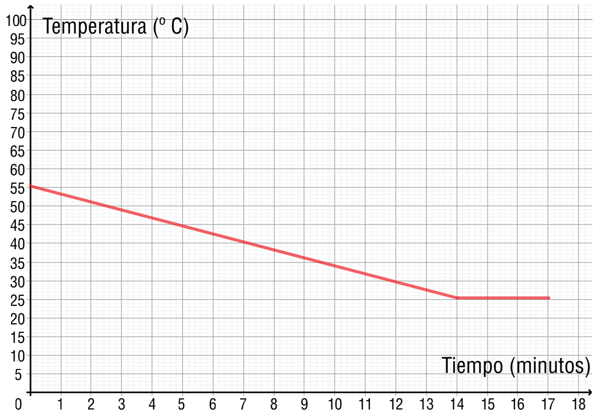


Gráfico 4

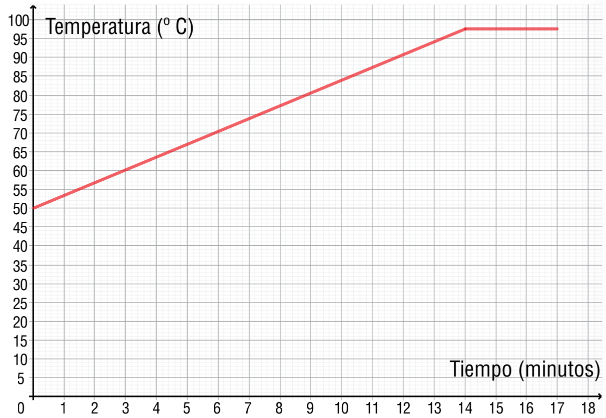


Gráfico 5

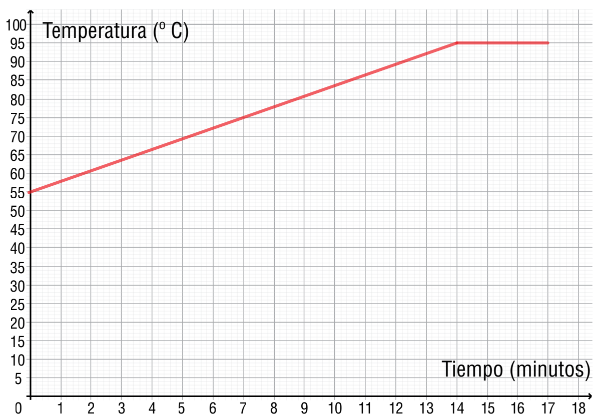
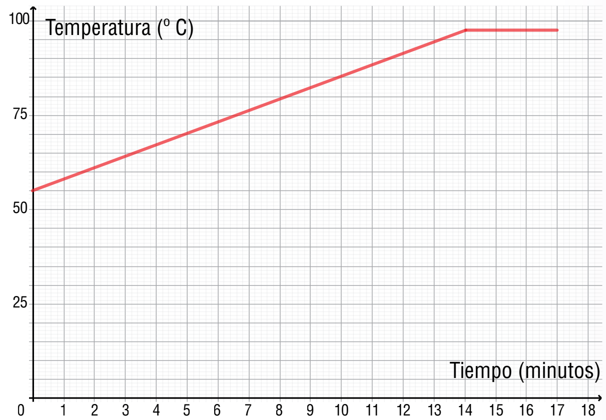


Gráfico 6



Problema 3

Ejemplo de un problema que propone la aplicación de un modelo

La siguiente fórmula permite calcular la temperatura del agua (°C) en función del tiempo (segundos) para una situación de calentamiento como la estudiada en los problemas anteriores. Se sabe que el agua alcanzó el punto de ebullición 150 segundos después de iniciado el proceso:

$$f(x) = 0{,}5 \cdot x + 25$$

a) ¿Cuál fue la temperatura del agua a los 10 segundos de iniciado el calentamiento? ¿Y a los 20 segundos?

b) ¿Cuántos segundos transcurrieron hasta que el agua alcanzó 31 °C? ¿Y hasta que alcanzó 62 °C?

c) ¿En algún momento la temperatura fue de 20 °C? ¿Cómo te diste cuenta?

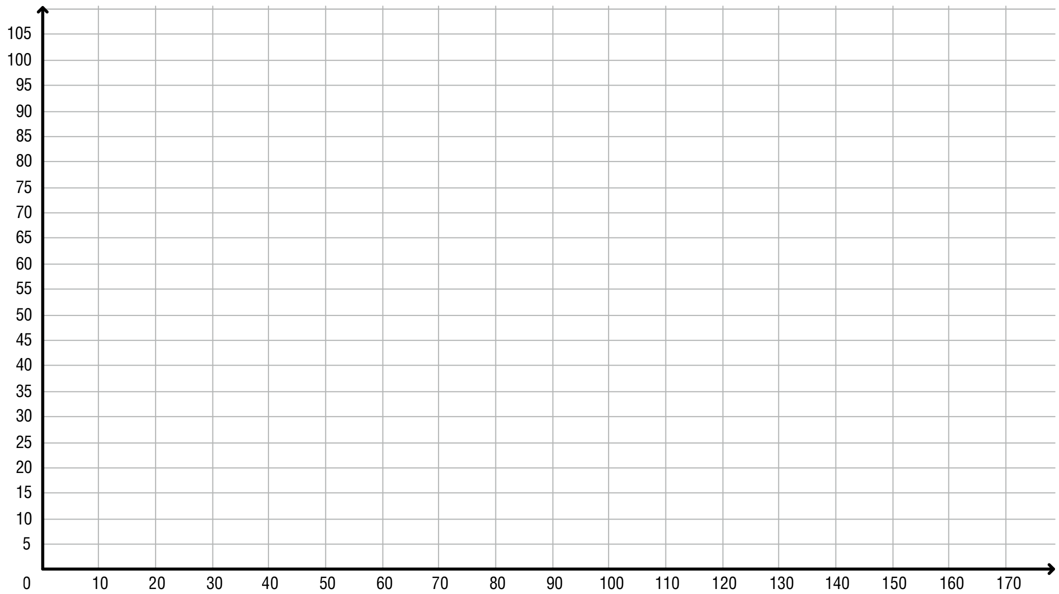
d) ¿Cuál es la temperatura inicial del agua?

e) ¿Cuál es la temperatura correspondiente al punto de ebullición?

f) Sabiendo que el agua se calentó durante exactamente 160 segundos, determiná cuál fue su temperatura en ese momento y a los 155 segundos de iniciado el calentamiento.

g) ¿Cuántos grados centígrados aumenta la temperatura del agua por cada segundo transcurrido hasta llegar al punto de ebullición?

h) En este sistema de ejes cartesianos, realizá un gráfico aproximado del proceso hasta los 160 segundos.



Problema 4

Las siguientes fórmulas sirven para hallar la temperatura del agua (°C) en función del tiempo transcurrido (minutos), en situaciones de calentamiento como las estudiadas anteriormente.

Se sabe que, en todas las experiencias realizadas, el punto de ebullición se alcanzó exactamente a los 98 °C.

$f(x) = 0{,}8 \cdot x + 18$ $\qquad$ $g(x) = 45 + 1{,}5 \cdot x$ $\qquad$ $h(x) = 4{,}2 \cdot (x + 8)$

Para cada una de las fórmulas determiná:

a) la temperatura inicial del agua;

b) la cantidad de grados centígrados que subió la temperatura por cada segundo transcurrido;

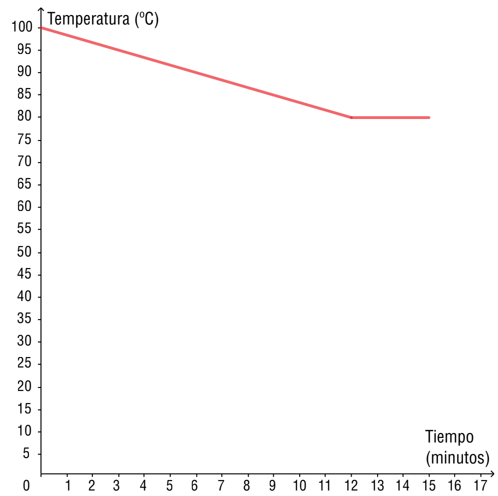
c) el tiempo que tarda en llegar al punto de ebullición.

Problema 5

Determiná cuáles de las siguientes representaciones podrían corresponder a situaciones de enfriamiento. ¿Cómo te diste cuenta?

La siguiente fórmula permite calcular la temperatura del agua (medida en °C) en función del tiempo (medido en minutos), después de iniciado el proceso:

$f(x) = 99 + 5 \cdot x$



La siguiente fórmula permite calcular la temperatura del agua (medida en °C) en función del tiempo (medido en minutos), después de iniciado el proceso:

$f(x) = 99 - 5 \cdot x$

Actividad de evaluación para el diagnóstico continuo

Luego del trabajo con el problema 3, se puede incluir esta actividad como tarea, para que cada estudiante la realice solo en su casa y la entregue por escrito en la clase siguiente.

Tarea: Al estudiar una situación de calentamiento de agua, como la trabajada en clase, se obtiene la siguiente fórmula que permite calcular la temperatura del agua (°C) en función del tiempo (segundos).

$$f(x) = 0{,}25 \cdot x + 20$$

Se sabe que el agua alcanzó el punto de ebullición 300 segundos después de iniciado el proceso y que, luego de 360 segundos, se apagó el fuego:

a) Determiná la temperatura que alcanzó el agua cuando transcurrieron 80 segundos de iniciado el proceso.

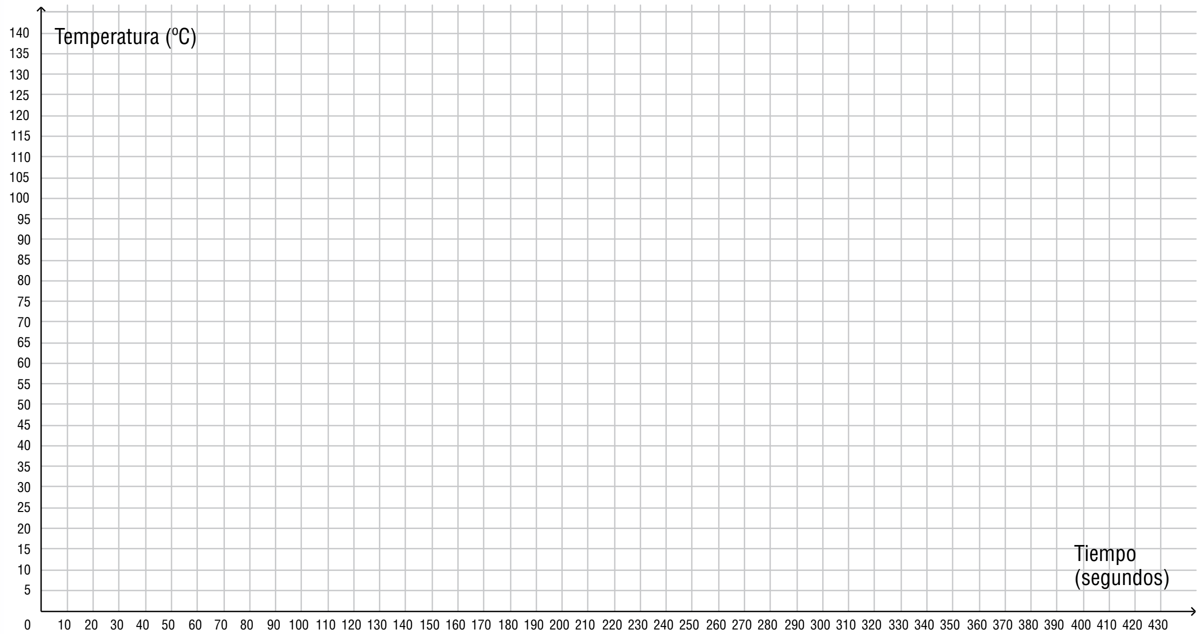
b) ¿Es cierto que a los 160 segundos de iniciado el proceso de calentamiento la temperatura del agua fue de 80 °C? Explicá tu respuesta.

c) ¿En algún momento la temperatura fue de 18 °C? ¿Cómo te diste cuenta?

d) ¿Cuál fue la temperatura a los 320 segundos de iniciado el calentamiento?

e) Por cada segundo transcurrido hasta llegar al punto de ebullición, ¿cuántos grados centígrados aumenta la temperatura del agua?

f) Realizá un gráfico aproximado del proceso hasta los 360 segundos.



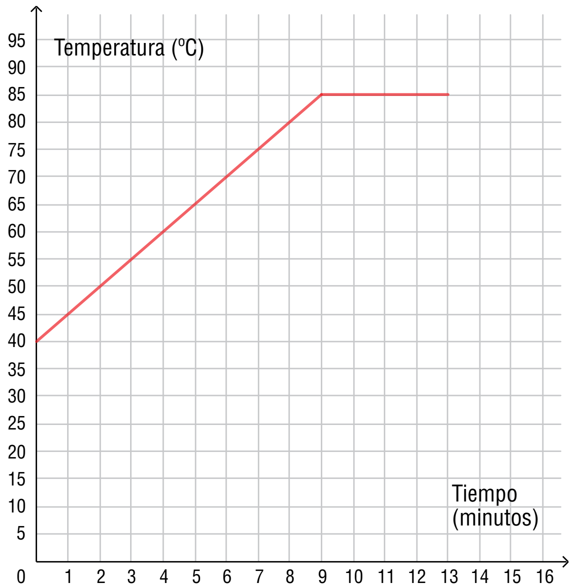
Actividad de evaluación para la acreditación

Al finalizar el trabajo con la secuencia presentada se puede proponer la realización de un examen escrito.

EXAMEN DE MATEMÁTICA

IMPORTANTE: para que un problema se considere bien resuelto debe estar acompañado de las estrategias, explicaciones y los cálculos que te permitieron arribar a la solución.

1) Al estudiar una situación de calentamiento de agua, como las trabajadas en clase, se realiza el siguiente gráfico que relaciona la temperatura del agua (°C) en función del tiempo (minutos).



Identificá y explicá cómo te diste cuenta de cuál es:

a) la temperatura inicial;

b) el punto de ebullición (aclarando temperatura y tiempo);

c) el tiempo de duración de la experiencia.

2) La siguiente fórmula permite calcular la temperatura del agua (medida en °C) en función del tiempo (minutos), hasta que el agua alcanzó el punto de ebullición a los 90 °C:

$$f(x) = 2,5 \cdot x + 35$$

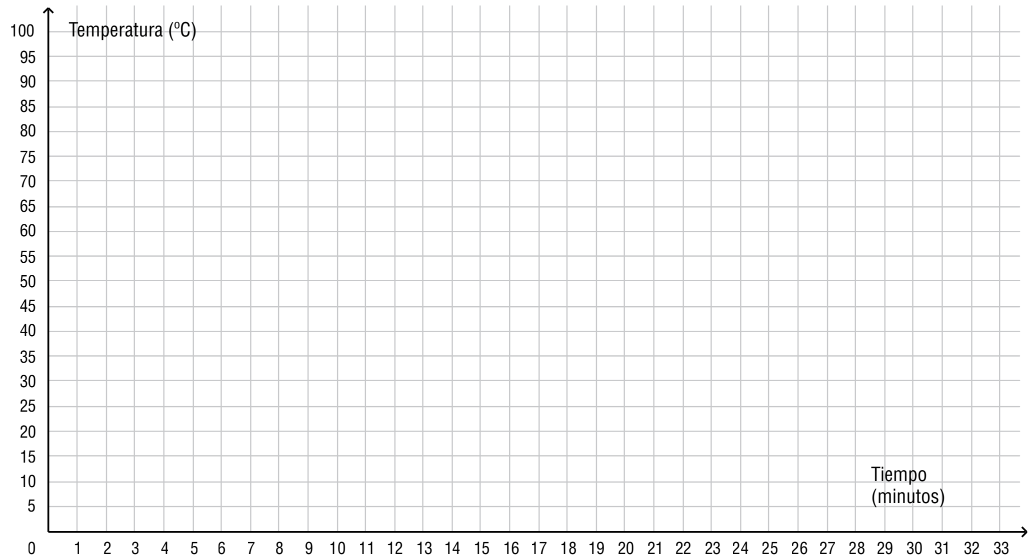
a) Respondé las siguientes preguntas:

i. ¿Es cierto que el punto de ebullición se alcanza exactamente a los 22 minutos de haber iniciado el proceso de calentamiento?

ii.¿Es cierto que la temperatura aumenta 2,5 °C por minuto?

iii.Pedro dice que la temperatura del agua es de 45 °C exactamente a los 11 minutos de haber iniciado el calentamiento, ¿estás de acuerdo?

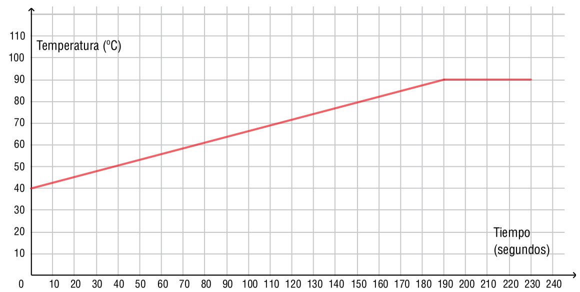
b) Realizá un gráfico de la situación analizada, sabiendo que el experimento duró 27 minutos.



Actividad de estudio para integrar los contenidos

El docente puede proponer que los estudiantes realicen esta actividad en forma individual o grupal. El propósito es retomar los diferentes registros de representación utilizados y realizar la conversión entre ellos. El docente puede conceder unos minutos de la clase, en el espacio colectivo, no solo para comprender el enunciado de la actividad sino también para sugerir volver sobre la carpeta con el fin de identificar actividades que puedan servir como referencia para completar el cuadro.

Completen el siguiente cuadro a partir de los datos provistos en cada fila.

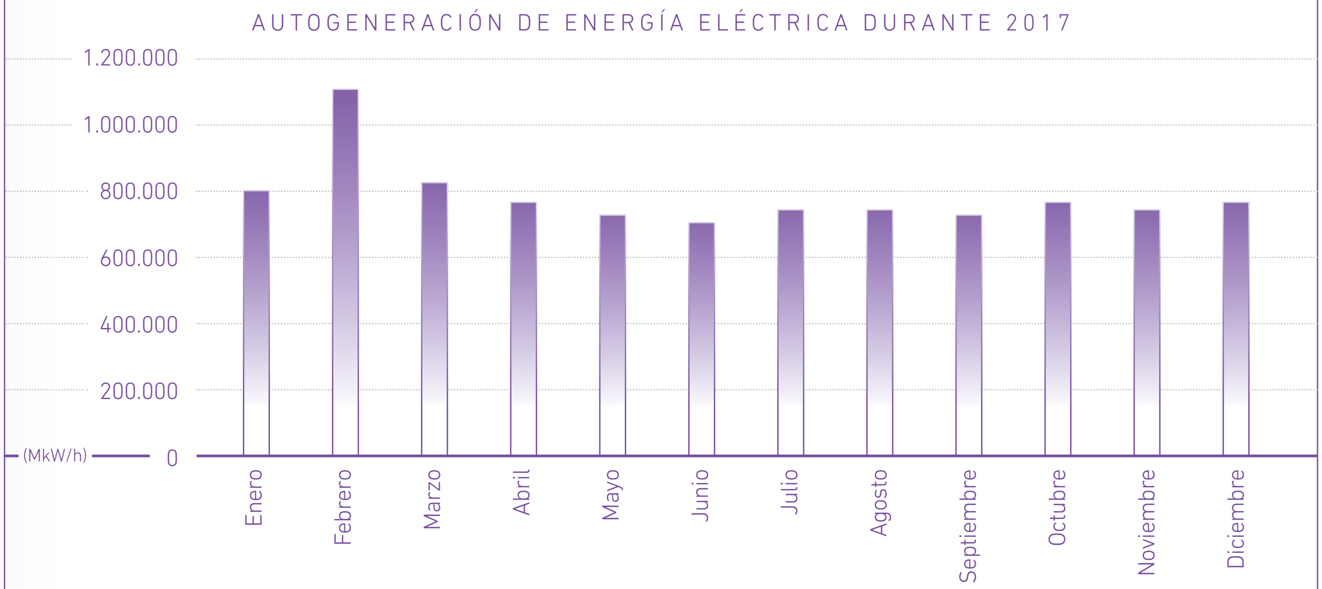
Enunciado	Gráfico	Fórmula
Un recipiente con agua a 36 °C fue colocado sobre una hornalla encendida y alcanzó el punto de ebullición a los 5 minutos a una temperatura de 96 °C. La duración total del experimento fue de 7 minutos.		
		
		$f(x) = 0{,}6 \cdot x + 35$ El punto de ebullición se alcanza a los 100 segundos. Duración total del experimento: 120 segundos.

PROPUESTA 2

Problemas que involucran representaciones gráficas.

Bloque 1

Problema 1. En el siguiente gráfico[1] se muestra la cantidad de energía eléctrica autogenerada (en MkW/h) para cada uno de los meses del año 2017, en Argentina.



a) ¿Cuál fue el mes en el que hubo mayor autogeneración de energía eléctrica? ¿Y menos?

b) ¿Cuántos MkW/h se autogeneraron en enero? ¿Y en junio?

c) Analicen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen en cada caso y compartan sus estrategias con el resto de la clase. La cantidad de MkW/h autogenerados en el año 2017 es…

i) menor a 1.200.000.

ii) menor a 14.400.000.

iii) mayor a 8.400.000.

iv) aproximadamente 9.440.000.

d) Decidan cuál de las siguientes tablas puede corresponder al gráfico analizado. Expliquen cómo lo pensaron.

TABLA 1

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
MkW/h	800.000	1.100.000	810.000	780.000	700.000	690.000	710.000	710.000	700.000	780.000	770.000	780.000

TABLA 2

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
MkW/h	800.000	1.100.000	820.000	780.000	700.000	720.000	710.000	710.000	700.000	780.000	770.000	780.000

1) *Fuente: Instituto Nacional de Estadística y Censos de la República Argentina (INDEC).*

Problema 2. En la siguiente tabla se registró la cantidad de Kw/h correspondiente al consumo de energía eléctrica de una familia tipo durante 2020:

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Kw/h	300	280	270	250	250	325	350	300	280	280	250	280

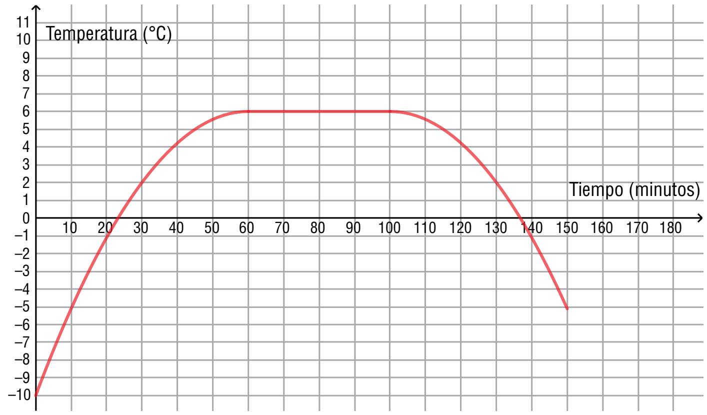
a) En grupos, realicen en un afiche un gráfico de barras con los datos de la tabla.

b) Sobre una de las paredes del aula, peguen los gráficos que produjeron. Analicen entre todos: ¿en qué se parecen y en qué se diferencian?

c) Si se quiere representar en un gráfico de barras el consumo bimestral de esta misma casa, ¿cómo lo harían? ¿Cómo creen que va a cambiar respecto al gráfico anterior? ¿Y si fuera quincenal?

Bloque 2

Problema 1. El siguiente gráfico representa la temperatura de una sustancia desde el momento en que se la introdujo en un microondas.



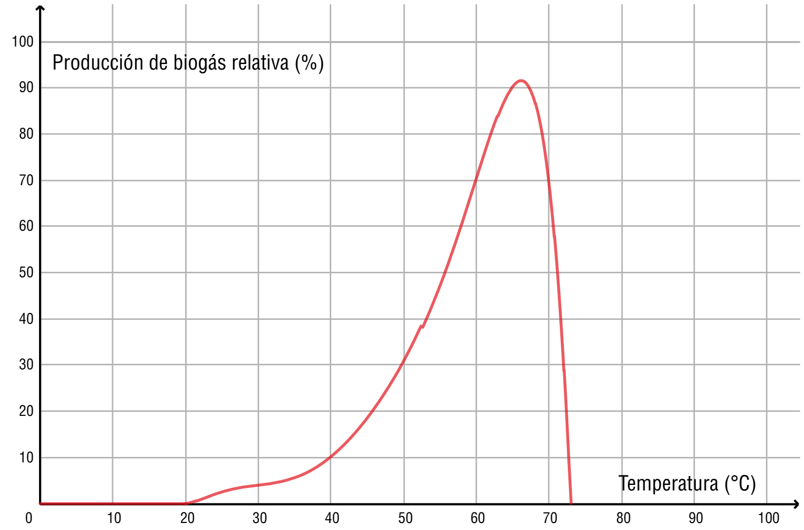
a) ¿Cuál era la temperatura de la sustancia a los 30 minutos? ¿Y a los 60 minutos?

b) ¿Es cierto que a los 120 minutos la temperatura de la sustancia era de 4 °C? ¿En algún otro momento tuvo la misma temperatura?

c) ¿En algún momento la temperatura de la sustancia fue de 11 °C?

d) ¿Cuál fue la temperatura mínima de la sustancia? ¿Y la máxima? ¿En qué momento se registró cada una?

Problema 2. En el siguiente gráfico se representa la producción de biogás[2] relativa, en función de la temperatura.



a) ¿Cuál fue el porcentaje de producción relativa de biogás a una temperatura de 50 ºC? ¿Y a 30 ºC?

b) ¿A qué temperatura se encontraban las bacterias cuando el porcentaje de producción relativa de biogás fue del 70? ¿En alguna otra temperatura tuvo el mismo porcentaje?

c) ¿Es cierto que, cuando las bacterias se encontraban a una temperatura del 45 ºC, el porcentaje de producción era del 20?

d) Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justifiquen sus respuestas:

1) A los 66 °C la producción relativa de biogás fue de 91 %.

2) La producción de biogás relativa fue máxima entre los 60 °C y los 70 °C.

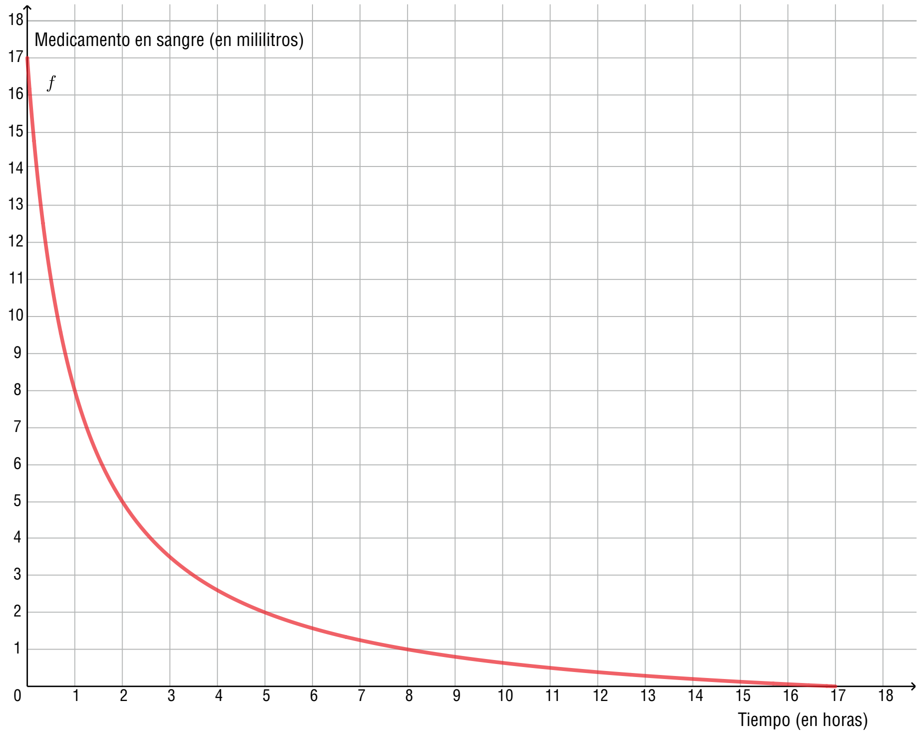
3) La producción máxima de biogás relativa fue superior al 90 %.

2) El biogás es un gas que se genera en medios naturales o en dispositivos específicos, por las reacciones de biodegradación de materia orgánica, mediante la acción de microorganismos (bacterias metanogénicas, etc.), y otros factores, en ausencia de oxígeno (esto es, en un ambiente anaeróbico).

Problema 3. La siguiente fórmula se usa para calcular la cantidad de mililitros de un medicamento en sangre, en función de las horas transcurridas desde que fue administrado.

$$f(x)=\frac{18}{x+1}-1$$

Si se representa dicha relación en un sistema de ejes cartesianos, resulta el siguiente gráfico:



a) Completen la tabla:

x	0	1	2	3	5	6	10	16	17
$f(x)$									

b) Decidan si las afirmaciones son verdaderas o falsas, y expliquen su respuesta.

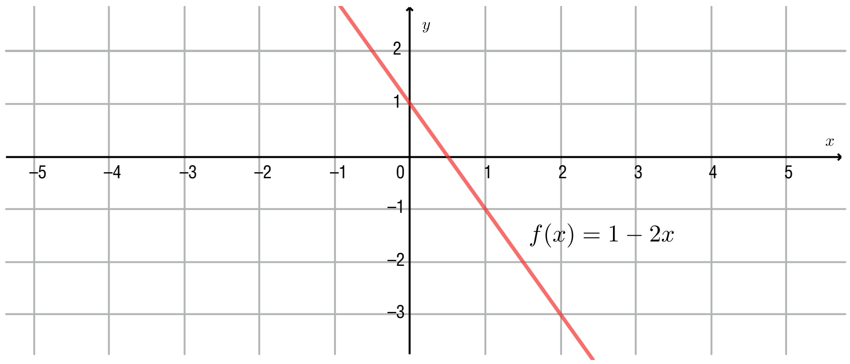
- La cantidad inicial de medicamento administrada fue de 8 mililitros.
- Transcurridas exactamente 4 horas desde que se administró el medicamento, la cantidad de mililitros es exactamente 2,5.
- A las 7 horas desde que se administró el medicamento, la cantidad de mililitros es mayor a 1.

c) Elaboren dos afirmaciones (una falsa y una verdadera) que no se puedan responder utilizando solamente el gráfico.

d) ¿Qué representa, en términos del problema, el punto de intersección del gráfico de la función y el eje ? ¿Es posible saber sus coordenadas?

Bloque 3

Problema 1. En el siguiente gráfico aparece representada la función dada por la fórmula $f(x) = 1 - 2 \cdot x$



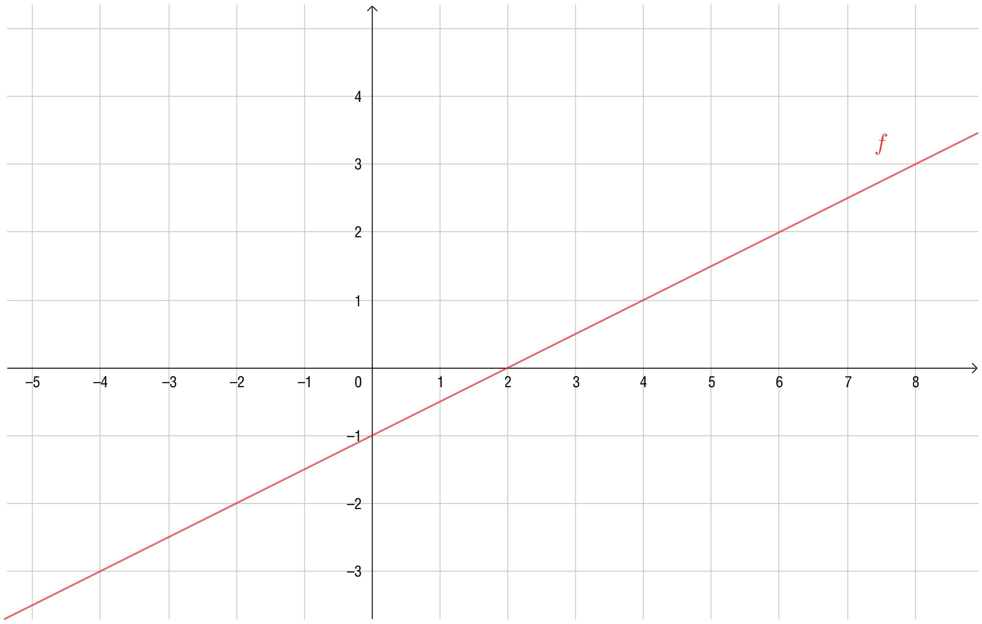
a) Decidan si los siguientes puntos pertenecen al gráfico:

- $(1; -1)$
- $(2; 2)$
- $(-2; 3)$
- $(4; -7)$
- $(100; -199)$

b) Escriban un punto que pertenezca al gráfico de la función y cuya coordenada x sea mayor que 20.

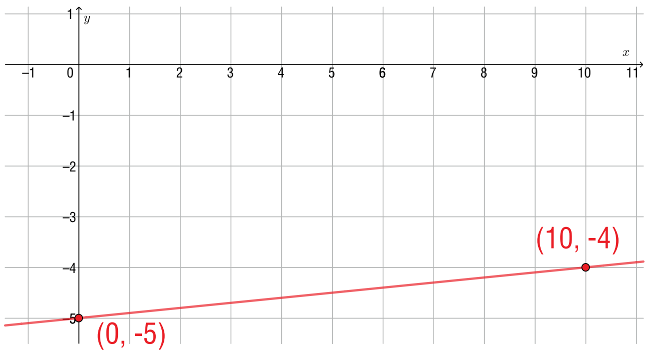
c) Escriban un punto que no pertenezca al gráfico de la función y cuya coordenada x sea mayor que 20.

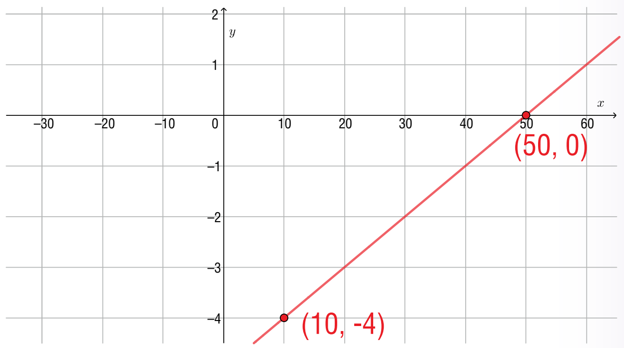
Problema 2. A partir del siguiente gráfico de la función lineal $f(x)=\frac{1}{2}x-1$ completen la tabla de valores.



x	-4	-2	0		3,5		10	50
$f(x)$	-3			0		2		

Problema 3. A continuación se presentan dos gráficos de funciones lineales:





a) ¿Es cierto que el punto $(0; -5)$ pertenece a los dos gráficos presentados? ¿Y el punto $(50; 0)$?

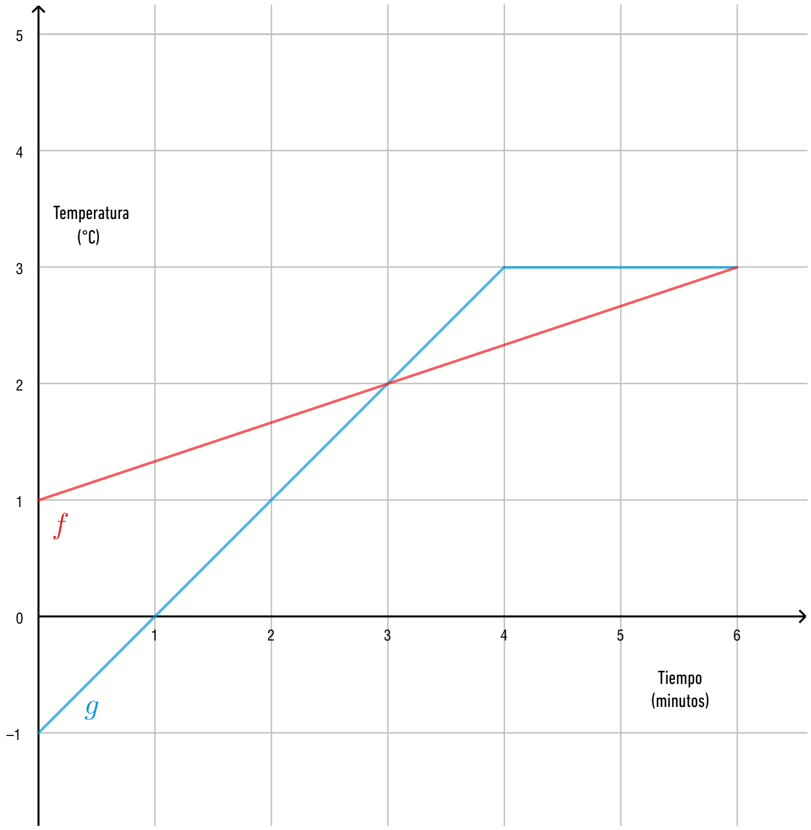
b) Decidan si la siguiente fórmula podría corresponder a alguno de los gráficos anteriores.

$$f(x)=\frac{1}{10}\cdot(x-10)-4$$

PROPUESTA 3

Un nuevo abordaje de las ecuaciones mediado por GeoGebra

Problema 1. Se realizaron experimentos con dos sustancias distintas. A continuación se muestra un gráfico donde se representa la temperatura de cada una de las sustancias durante los experimentos, a partir del momento en que comienza la medición.

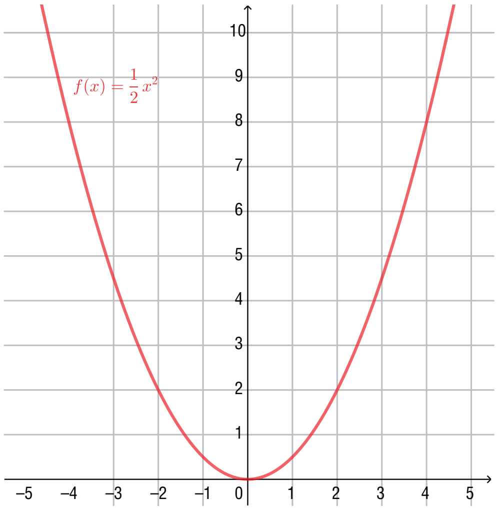


a) Marcá sobre el gráfico puntos que sirvan para determinar la temperatura inicial de ambas sustancias e indicá sus coordenadas. ¿Es cierto que inicialmente la temperatura de la sustancia f es menor que la de g?

b) Marcá todos los puntos sobre el gráfico que sirvan para indicar en qué momento la sustancia g tiene una temperatura de 1 °C e indicá sus coordenadas ¿En ese instante la otra sustancia tiene una temperatura mayor o menor?

c) Marcá sobre el gráfico todos los puntos en los que la temperatura de ambas sustancias sea la misma en el mismo momento e indicá sus coordenadas. ¿Es posible saber cuál es el valor de esa temperatura y en qué momento la alcanzaron?

Problema 2. El siguiente gráfico representa la función $f(x)=\frac{1}{2}x^2$



a) Marcá sobre el gráfico todos los puntos que sirven para hallar las soluciones de la ecuación $\frac{1}{2}x^2=8$ e indicá sus coordenadas.

b) Marcá sobre el gráfico todos los puntos que sirven para hallar las soluciones de la ecuación $f(x)=4,5$ e indicá sus coordenadas.

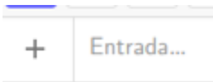
c) ¿Es cierto que el punto $(6;18)$ sirve para hallar una solución de la ecuación $f(x)=18$? ¿Y el punto $(-6;18)$? ¿Y $(-7;24)$?

d) ¿Es cierto que el valor $x=-2$ es solución de la ecuación $\frac{1}{2}x^2=2$. ¿Existe algún otro valor de x que sea solución?

Problema 3. Para determinar valores de x que sirven para hallar la solución $x^2 - 4x + 1 = -2$, Marcelo y Andrea utilizaron dos estrategias diferentes, y ambos usaron GeoGebra.

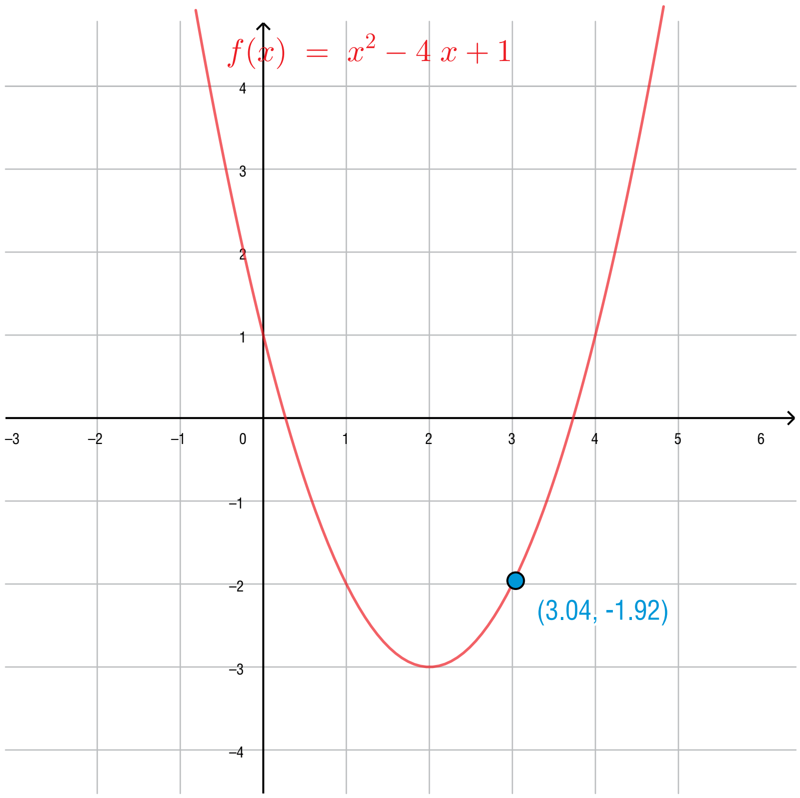
Analicen cada una de las estrategias y respondan las preguntas.

Estrategia de Marcelo

- Ingresé en la barra de entrada de GeoGebra 

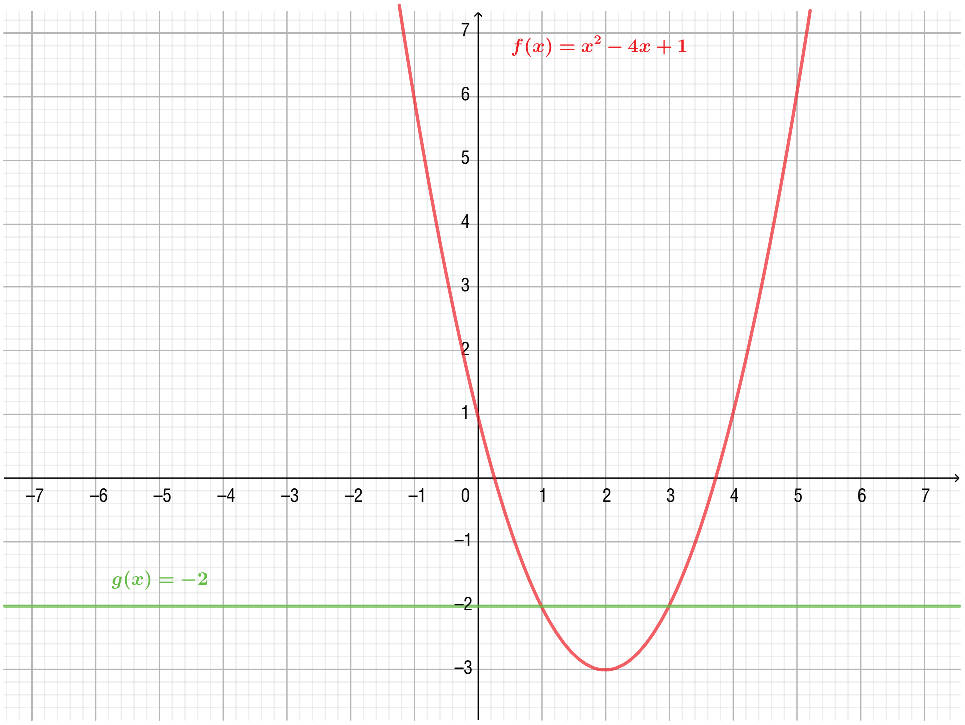
la función $f(x) = x^2 - 4x + 1$
- Con la herramienta Punto 

agregué un punto A sobre la gráfica.
- Con la herramienta Mueve  fui desplazando el punto A pero no conseguí ubicarlo para que la segunda coordenada quede exactamente en −2, así que lo ubiqué en un valor cercano, que es −1,92. En ese punto, la primera coordenada toma un valor cercano a 3, que es 3,04.
- Luego hice $f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = 9 - 12 + 1 = -2$. Entonces, si x toma el valor 3 se cumple la relación $x^2 - 4x + 1 = -2$.



Estrategia de Andrea

- Ingresé en la barra de entrada de GeoGebra la función $f(x)=x^2-4x+1$ y apareció un gráfico en la pantalla.
- Luego, para trazar una recta horizontal, ingresé en la barra de entrada $g(x)=-2$.



- Finalmente usé la herramienta Intersección , para hallar los puntos en donde “se cortan” ambas gráficas. Me di cuenta de que, si la variable x toma el valor 1 o 3, se cumple la relación $x^2-4x+1=-2$.

a) Utilizá GeoGebra para poner en juego la estrategia de Marcelo.

b) Usando esta estrategia, ¿es posible obtener otro valor de x que sea solución de $x^2-4x+1=-2$?

c) Utilizá GeoGebra para seguir los pasos de la estrategia de Andrea. ¿Es cierto que sirve para encontrar dos valores de x que cumplen la relación $x^2-4x+1=-2$?

d) Encontrá todos los valores de x que son solución de $x^2-4x+1=6$ utilizando GeoGebra.

Problema 4. Utilizando GeoGebra, graficá $f(x)=x^2+3x-8$. Luego, basándote en las estrategias trabajadas en el problema anterior, resolvé cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $f(x)=2$

b) $f(x)=-8$

c) $f(x)=-11$

d) $f(x)=20$

Problema 5. Utilizando GeoGebra, graficá $f(x)= -2x \cdot (x+2)$ y resolvé las siguientes ecuaciones:

a) $-2x \cdot (x+2)=0$

b) $-2x \cdot (x+2)=2$

c) $-2x \cdot (x+2)=-\frac{21}{2}$

d) $-2x \cdot (x+2)=4$

Problema 6. Encontrá **alguna/s** soluciones para las siguientes ecuaciones:

a) $2x^3-15x^2+36x-25=7$

b) $2x^3-15x^2+36x-25=2$

c) $1+x^2=-3$

d) $\frac{1}{x}=2$

e) $x \cdot (x-3) \cdot (x+2)=0$

Bibliografía de referencia

BIBLIOGRAFÍA DE REFERENCIA

Agrasar, M. (2011). *Articular lo que saben los alumnos: un desafío necesario para abordar lo nuevo. En: Díaz, A. (coord.), Enseñar Matemática en la escuela media. Serie Claves para la Formación Docente. Buenos Aires: Editorial Biblos.*

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). *Computer Mediated Learning: An Example of an Approach. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5(1), 25-45.*

Arteaga, P.; Batanero, C.; Cañadas, G. y Contreras, M. (2011). *Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 76, 55-67.*

Barallobres, G. y otros (1998). *Funciones. Documento de Desarrollo Curricular. MCBA.*

Blum, W. & M. Niss (1991). *Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 37-68.*

Blum, W., & Leiss, D. (2005). *"Filling Up" – The problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. En CERME 4–Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 1623-1633).*

Bosch, M. y Gascón, J. (2005). *La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. En C. Castro y M. Gómez (eds.), Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas (pp. 135-160). Madrid: Edebé.*

Bosch, M.; García, F. J.; Gascón, J. y Ruiz Higueras, L. (2006). *La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. Educación matemática, 18(2), 37-74.*

Broitman, C. (et al.) (coord.) (2021). *El Libro de Mate 1.°/2.°. Buenos Aires: Santillana.*

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.*

Cobb, P. & Yackel, E. (1996). *Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. Purdue University, Vanderbilt University Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 27, No. 4, 458-477.*

Charlot, B. (1991). *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. Traducción en versión mimeo de la conferencia publicada en Bkouche, R.; Charlot, B. y Rouche, N.: Faire des mathematiques: le plaisir du sens. Paris: Armand Colin.*

Charnay, R. (1994). *Aprender por medio de la resolución de problemas. En Parra C. y Saiz I. (comp.), Didáctica de la matemática. Buenos Aires: Paidós.*

Chemello, G.; Díaz, A. y otros (1997). *Matemática: Modelos didácticos. Buenos Aires, Argentina: Conicet, Programa Prociencia.*

Chevallard, Y.; M. Bosch y J. Gascón (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: ICE - Horsori.*

Díaz, A. (2013). Evaluación. *En: Kurzrok, L. (coord.). Enseñar Matemática en la escuela primaria. Serie Respuestas. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Tinta Fresca.*

Duval, R. (1993). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Annales de didactique et de sciences cognitives 5, 37-65, IREM de Strassbourg. (Traducción para fines educativos: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav - IPN, 1996, México).*

Hanfling, M. (2001). *La noción de función a través de la historia. En Carpeta de trabajo. Estrategias de enseñanza. Bernal, Argentina: Universidad Nacional de Quilmes.*

International GeoGebra Institute (2018). *GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone (Versión 5.0.474.0-d) [software]. Obtenido de http://www.geogebra.org/*

Itzcovich, H. (coord.) (2011). *El estudio y la evaluación en Matemática. En La Matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula. Buenos Aires: Aique.*

Maggio, M. (2005). *Los portales educativos: entradas y salidas a la educación del futuro. En: Litwin, E. (comp.), Tecnología Educativa en tiempos de Internet. Buenos Aires: Amorrortu.*

Melchiori, D.; Nicodemo, M.; Sanguinetti, D. y Trillini, M. P. (2017). *Clase 1: Registros de representaciones semióticas y Marcos interpretativos. En Novembre, A. (coord.), Reflexiones en torno al Álgebra.*

Melchiori, D.; Nicodemo, M.; Sanguinetti, D. y Trillini, M. P. (2017). *Clase 6: La evaluación en el ámbito del álgebra y las funciones. Reflexiones en torno al Álgebra y las Funciones y su enseñanza. Buenos Aires: INFD. Ministerio de Educación y Deportes de la Nación.*

Michailuk, M. C. y Nicodemo, M. (2015). *La evaluación en el área de matemática. Claves y Criterios. Nivel Secundario. Directores que Hacen Escuela. Buenos Aires: OEI.*

Murúa, R. (2016). *Modelización con GeoGebra: un procedimiento instrumentado. En Astudillo, G.; Willging, P. y Dieser, M. P. (ed.), VI Reunión Pampeana de Educación Matemática: memorias (pp. 110-119). Santa Rosa, Argentina: Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.*

Napp, C.; Novembre A.; Sadovsky, P. y Sessa, C. (2000). *Documento No. 2. Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio. La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar matemática. Buenos Aires: DGCyE, Subsecretaría de Educación.*

Nicodemo M.; Novembre, A.; Sanguinetti D. y Trillini, M. (2017). *Reflexiones en torno a las ecuaciones y su enseñanza (Acta de congreso aprobada por comité evaluador). VII Congreso Uruguayo de Educación Matemática.*

Niss, M. (1999). *Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 40(1), 1-24.*

OCDE (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Readings, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. París: OCDE.*

Palau de Maté, C. (comp.) (2003). *Evaluar para enseñar y evaluar para acreditar. En La enseñanza y la evaluación, una propuesta para matemática y lengua. Buenos Aires: Geema.*

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos. Buenos Aires: Libros del Zorzal.*

Segal, S. y Giuliani, D. (2008). *Trabajando con ecuaciones. En Modelización matemática en el aula: posibilidades y necesidades (pp. 79-96). Buenos Aires: Libros del Zorzal.*

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas (Vol. 2). Libros del Zorzal.*

Sessa, C. (et al.) (2021). *La incorporación de la computadora a la enseñanza de funciones cuadráticas. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: UNIPE, Editorial Universitaria.*

Tarasow, P. (2010). *La tarea de planificar. En Kurzrok, L. (coord.), Enseñar Matemática en la Escuela Primaria. Buenos Aires: Tinta Fresca.*

FUNDACIÓN YPF

fundacionypf.org

lab.fundacionypf.org

Seguinos en nuestras redes:

ISBN 978-987-4153-20-3